УДК 517.948
doi: 10.18101/2304-5728-2017-2-8-11

ЛИНЕЙНЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ТИПА

© Шишкин Геннадий Александрович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский государственный университет
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, д. 24а

В статье исследуется возможность решения линейных начальных задач дифференциальных уравнений с функциональными запаздываниями неопределенного типа с использованием функции гибкой структуры.
Ключевые слова: начальная задача; дифференциальные уравнения; разрешающее уравнение; функция гибкой структуры; неопределенный тип уравнений.

Введение

Н. К. Куликов [1, 2] и многие его ученики и последователи применяли функцию гибкой структуры для решения начальных задач дифференциальных уравнений с обыкновенным аргументом. Выпишем ее общий вид и дадим информацию о входящих в нее функциях и постоянных

$$y^{(i)}(u_j(x)) = D^{-1}[\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0)\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i} + \\ + \int_{x_0}^{u_j(x)} \frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt] + \delta_i u_j'^n(x)\mu(u_j(x)), \qquad (*)$$

где $i=\overline{0,n}$, $D = D(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — определитель Вандермонда, составленный из неопределенных параметров $r_1, r_2, \ldots, r_n$, которые определяются в ходе решения задачи, исходя из оптимальности ее решения. Определители $\Delta_s(x-t)$, $s=\overline{1,n}$ получаются из определителя D заменой s-ой строки строкой $\exp r_1(x-t), \exp r_2(x-t), \ldots, \exp r_n(x-t)$, $\mu(x)$ — новая неизвестная функция и $\delta_n = 1$, $\delta_i = 0$ $\forall i=\overline{0,n-1}$.

Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим общий вид одного класса дифференциальных уравнений, в котором отсутствует функция и ее производные от аргумента x

$$y^{(n)}(u_l(x)) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x) y^{(i)}(u_j(x)) = f(x), \qquad (1)$$

где $u_j(x) \le x$ $\forall j=\overline{1,l}$ и $u_j(x) \not\equiv x$, функции $f_{ij}(x)$, $u_j(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $x_0 \le x \le b$.

Определим начальные функции для уравнения (1) на начальном множестве E_{x_0}

$$y^{(i)}(u_j(x)) = \varphi^{(i)}(u_j(x)), \quad i=\overline{0,n-1}, \quad x \in E_{x_0} \tag{2}$$

где $E_{x_0} = \overset{l}{\underset{j=0}{U}} E^j_{x_0}, E^j_{x_0}$ — множество точек, для которых соответствующие $u_j(x) \le x_0$ при $x \ge x_0$ $\forall j=\overline{1,l}$, $E^0_{x_0} = [a, x_0]$.

Определение. Уравнения вида (1) назовем уравнениями неопределенного типа, так как в зависимости от значений коэффициентов в уравнении можно получать уравнения, относящиеся к различным типам линейных дифференциальных уравнений как с обыкновенным, так и с запаздывающим аргументом запаздывающего, нейтрального и опережающего типов.

В работе [3] доказано, что решение задачи (1), (2) при условиях непрерывности входящих в нее функций существует и единственно на отрезке $x \in [x_0, b]$. Будем искать его, применив для преобразований функцию гибкой структуры [2], обозначенную (*).

Подставим искомое решение начальной задачи (1), (2) в виде функции гибкой структуры (*) в уравнение (1) и перенесем все известные выражения в правую часть равенства

$$u'^n_l(x)\mu(u_l(x)) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x) \int_{x_0}^{u_j(x)} D^{-1} \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i} \mu(t)dt =$$

$$= f(x) - \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=0}^{n-1} D^{-1} \sum_{s=1}^{n} y^{s-1}(x_0) f_{ij}(x) \frac{d^i \Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i}. \tag{3}$$

Суммируя затем интегралы с одинаковыми пределами интегрирования от неизвестной функции $\mu(t)$ и вводя обозначения для известных выражений

$$G_j(x,t) = D^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x) \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i},$$

$$F(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{n} y^{(s-1)}(x_0) f_{ij}(x) D^{-1} \frac{d^i \Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i},$$

в равенстве (3), придем к разрешающему интегральному уравнению типа Вольтерра

$$u'^n_l(x)\mu(u_l(x)) + \sum_{j=1}^{l} \int_{x_0}^{u_j(x)} G_j(x,t)\mu(t)dt = F(x) \cdot \tag{4}$$

Далее, поделив последнее равенство на $u'^n_l(x) \ne 0$, введя новую переменную $z = u_l(x)$, обратную функцию $x = u_l^{-1}(z)$ и обозначения для известных выражений, получим для задачи (1)-(2) разрешающее уравнение типа Вольтерра с обыкновенным аргументом

$$\mu(z)+\sum_{j=1}^{l}\int_{x_0}^{v_j(z)} H_j(z,t)\mu(t)dt=\Phi(z), \tag{5}$$

где

$$H_j(z,t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f_{ij}(u_l^{-1}(z))}{Du_l^{'n}(u_l^{-1}(z))}\cdot\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(u_l^{-1}(z))-t)}{\left[\partial u_l^{-1}(z)\right]^i},\quad v_j(z)=u_j(u_l^{-1}(z)),$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{u_l^{'n}(u_l^{-1}(z))}\Bigg[f(u_l^{-1}(z))-\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{n}y^{(s-1)}(x_0)\cdot$$

$$\cdot f_{ij}(u_l^{-1}(z))D^{-1}\frac{d^i\Delta_s(u_j(u_l^{-1}(z))-x_0)}{\left[du_l^{-1}(z)\right]^i}\Bigg].$$

Вывод. Задача Коши для дифференциальных уравнений неопределенного типа (1) с начальными функциями (2) с запаздывающим аргументом с помощью функции гибкой структуры (*) преобразуется к разрешающему интегральному уравнению типа Вольтерра (5) с обыкновенным аргументом. Единственное решение этого уравнения существует при выполнении условий непрерывности функций $\Phi(z), H_j(z,t)$ в разрешающем уравнении (5) в любом заданном квадрате $u_l(x_0)\le z\le u_l(b)$.

Пример. Найдем точное решение начальной задачи уравнения неопределенного типа

$$\begin{cases} y'(\frac{x}{4})+y(\frac{x}{2})=2x+1, \\ y(x)=x,\quad x_0=0\quad на\quad E_{x_0}. \end{cases}$$

По формуле функции гибкой структуры (*) имеем

$$y(x)=y(x_0)e^{r(x-x_0)}+\int_{x_0}^{x}e^{r(x-t)}\mu(t)dt=\int_0^x e^{r(x-t)}\mu(t)dt,\quad y(\frac{x}{2})=\int_0^{x/2}e^{r(\frac{x}{2}-t)}\mu(t)dt,$$

$$y(\frac{x}{4})=\int_0^{x/4}e^{r(\frac{x}{4}-t)}\mu(t)dt,$$

$$y'(\frac{x}{4})=\frac{r}{4}\int_0^{x/4}e^{r(\frac{x}{4}-t)}\mu(t)dt+\frac{1}{4}\mu(\frac{x}{4}).$$

Подставив в исходное уравнение найденные выражения $y'(\frac{x}{4})$ и $y(\frac{x}{2})$ получим

$$\frac{1}{4}\mu(\frac{x}{4})+\frac{r}{4}\int_0^{x/4}e^{r(\frac{x}{4}-t)}\mu(t)dt+\int_0^{x/2}e^{r(\frac{x}{2}-t)}\mu(t)dt=2x+1.$$

При $r=0$ разрешающее уравнение упростится

$$\frac{1}{4}\mu(\frac{x}{4}) + \int_0^{x/2} \mu(t)dt = 2x + 1,$$

его решение $\mu(x) = 4$. Подставив это значение в функцию гибкой структуры данной задачи при $r = 0$, найдем ее решение $y(x) = 4x$. Нетрудно проверить, что условия начальной задачи выполняются.

Заключение

В периодической литературе имеются работы, которые затрагивают многие вопросы решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, но мало работ, которые поднимали бы и решали проблему преобразования начальных задач для таких уравнений к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом.

В данной статье исследованы возможности построения модели с обыкновенным аргументом для начальной задачи одного вида дифференциальных уравнений неопределенного типа. Полученные аналитические выражения модели начальной задачи дают возможность оптимизировать нахождение ее точного или приближенного решения за счет оптимального выбора параметров функции гибкой структуры и разработать программу решения поставленных задач на ЭВМ. Этому и будут посвящены дальнейшие исследования и разработки программ.

Литература

1. Куликов Н. К. Инженерный метод решения и исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1964. 207 с.
2. Куликов Н. К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой // Тематический сб. МТИПП. М., 1974. С. 47–57.
3. Шишкин Г. А. Исследование и решение начальных задач для линейных дифференциальных уравнений с функциональным запаздыванием. Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2011. 68 с.

LINEAR INITIAL PROBLEMS OF INDETERMINATE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Gennadiy A. Shishkin
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

In the article, using a function of flexible structure, we have considered the possibility of solving linear initial problems of indeterminate differential equations with functional lags.
Keywords: initial problem; differential equations; resolving equation; function of flexible structure; indeterminate equations.