УДК 517.977
doi: 10.18101/2304-5728-2017-2-46-53

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ЗАДАЧЕ ОБХОДА ЦЕЛЕЙ [1]

© Трушкова Екатерина Александровна
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65
E-mail: katerinatr@mail.ru

Сформулирована математическая постановка линейно-квадратической задачи в фиксированные моменты времени с одинаковыми скоростями прохода данных целей. Подобные динамические задачи часто возникают при управлении движением механических систем, летательных аппаратов (в частности, беспилотных), роботов-манипуляторов и т. д. Обоснована процедура построения явного аналитического выражения для функций, синтезирующих оптимальные траектории рассматриваемых задач, подчиненные соответствующим многоточечным смешанным граничным условиям. С помощью описанной процедуры достаточно просто строятся синтезирующие функции (позиционное управление, управление с обратной связью) и соответствующие множества оптимальных траекторий в рассматриваемом классе задач обхода целей с одинаковыми скоростями прохода. Приведен иллюстрирующий пример построения различных оптимальных траекторий для одной задачи обхода целей на плоскости при параметрическом задании фиксированных скоростей прохождения целей.

Ключевые слова: задача обхода целей; беспилотный летательный аппарат; динамическая система; линейно-квадратическая задача; оптимальная траектория; позиционное управление; смешанные граничные условия.

Введение

Проблема синтеза оптимальных систем является одной из основных проблем в математической теории оптимальных процессов, лежащей на стыке теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. Умение решать проблему синтеза очень важно в прикладных задачах оптимального управления, так как если известна синтезирующая функция, то техническое осуществление оптимального хода процесса может быть произведено по схеме с обратной связью.

В настоящее время все большее внимание исследователей привлекают задачи управления с неразделенными многоточечными промежуточными условиями (например, [1]–[5]). Подобные задачи возникают при управлении движением механических систем, летательных аппаратов (в частности, беспилотных), роботов-манипуляторов и т. д. В основном предлагаются подходы к построению численных методов поиска программного управления при решении подобных задач.

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-00925а).

В работе [6] был предложен способ построения управления с обратной связью для классов задач оптимального управления линейной системой с неразделенными трехточечными условиями. Основываясь на этих результатах, в настоящей статье сформулирована математическая постановка линейно-квадратической задачи оптимального обхода заданных пространственных целей в фиксированные моменты времени с одинаковыми скоростями прохода целей как задачи оптимального управления с неразделенными многоточечными граничными условиями, а также разработана процедура вычисления явных аналитических выражений для оптимальных траекторий рассматриваемых задач.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального (по квадратичному критерию) обхода заданных пространственных целей в фиксированные моменты времени с одинаковыми скоростями прохода целей для линейной стационарной управляемой динамической системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + A_2 v(t), \quad t \in [t_0, t_1], t_0 < t_1, \\ \dot{v}(t) &= B_1 x(t) + B_2 v(t) + Cu(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Математически эта задача представляет собой задачу оптимального управления системой (1), где состояние динамической системы описывается вектором $x(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)^T \in W_2^1[t_0, t_1]$, скорость — вектором $v(t) = \left(v_1(t), \ldots, v_n(t)\right)^T \in W_2^1[t_0, t_1]$, управление — вектором $u(t) = \left(u_1(t), \ldots, u_n(t)\right)^T \in L_2[t_0, t_1]$, с условиями (неразделенными многоточечными промежуточными условиями)

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0, \, x(\alpha_i) = x_i, \, v(\alpha_{i-1}) = v(\alpha_i), \\ &i = \overline{1, m}, \quad t_0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{m-1} < \alpha_m = t_1. \end{aligned} \tag{2}$$

на минимум квадратичного критерия

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(u(t), u(t)\right) dt \to \min. \tag{3}$$

2. Множество оптимальных траекторий

Кроме управляемости динамической системы (1) дополнительно предполагаем единственность решения задачи оптимального управления системой (1) на каждом отрезке времени $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $i = \overline{1, m}$, с фиксированными граничными условиями $x(\alpha_{i-1}) = x_{i-1}$, $x(\alpha_i) = x_i$, $v(\alpha_{i-1}) = v_{i-1}$, $v(\alpha_i) = v_i$ для любых $x_{i-1}, x_i, v_{i-1}, v_i \in R^n$.

Множество M оптимальных траекторий $\left(x(t), v(t)\right)$ задачи управления (1)–(3) должны удовлетворять соответствующим дифференциальным соотношениям принципа максимума Л. С. Понтрягина при

$t \in [t_0, \alpha_1) \cup (\alpha_1, \alpha_2) \cup \ldots \cup (\alpha_{m-1}, t_1]$

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 v(t), \dot{v}(t) = B_1 x(t) + B_2 v(t) + \frac{1}{2} CC^T \psi_2(t),$$
$$\dot{\psi}_1(t) = -A_1^T \psi_1(t) - B_1^T \psi_2(t), \dot{\psi}_2(t) = -A_2^T \psi_1(t) - B_2^T \psi_2(t), \tag{4}$$

и n-параметрическим (с параметром p) условиям

$$x(\alpha_i) = x_i, v(\alpha_i) = p, i = \overline{0, m}. \tag{5}$$

Общее решение системы (4) имеет вид

$$x(t) = \Phi_1(t) C_i, \quad v(t) = \Phi_2(t) C_i, \quad \psi_1(t) = \Phi_3(t) C_i,$$
$$\psi_2(t) = \Phi_4(t) C_i, \quad t \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i), \quad i = \overline{1, m},$$

где C_i — произвольные постоянные вектора размера $4n$, $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$, $\Phi_4(t)$ — первый, второй, третий и четвертый блоки из n строк фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы (4). Тогда условия (5) можно переписать в виде

$$L(\alpha_{i-1}, \alpha_i) C_i = \begin{pmatrix} \Phi_1(\alpha_{i-1}) \\ \Phi_1(\alpha_i) \\ \Phi_2(\alpha_{i-1}) \\ \Phi_2(\alpha_i) \end{pmatrix} C_i = \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & E_n \\ O_n & O_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_n \\ O_n \\ E_n \\ E_n \end{pmatrix} p,$$

и выразить $C_i = D_i p + d_i$, где

$$D_i = L^{-1}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \begin{pmatrix} O_n \\ O_n \\ E_n \\ E_n \end{pmatrix}, \quad d_i = L^{-1}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & E_n \\ O_n & O_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix}.$$

Здесь через E_n, O_n обозначены соответственно единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$.

Из вышеизложенного вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема. Множество оптимальных траекторий задачи оптимального обхода заданных пространственных целей x_i в фиксированные моменты времени α_i с одинаковыми скоростями прохода целей (1)–(3) имеет вид n-параметрического семейства

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \exists p \in R^n : x(t) = \Phi_1(t)(D_i p + d_i), \\ \quad v(t) = \Phi_2(t)(D_i p + d_i), t \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i], i = \overline{1, m} \end{array} \right\}.$$

В силу теоремы, опираясь на результаты работ [6]–[11], можно построить функцию $u(t, x)$, синтезирующую семейство M. А именно, для каждого из полуинтервалов $t \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i)$, $i = \overline{1, m}$, кроме конечного числа точек, в которых обращаются в нуль определители матриц $\Phi_1(t) D_i$ и

$\Phi_2(t)D_i$ соответственно, справедлива формула

$$u(t,x)=\frac{1}{2}CC^T\Phi_4(t)\Big(D_i\left(\Phi_1(t)D_i\right)^{-1}\left(x-\Phi_1(t)d_i\right)+d_i\Big). \tag{6}$$

3. Пример построения оптимальных траекторий

Поставим задачу оптимального обхода целей $x_1(0)=-1$, $x_2(0)=0$, $x_1(1)=2$, $x_2(1)=-2$, $x_1(2)=1$, $x_2(2)=1$ на плоскости с одинаковыми скоростями прохода для управляемой системы и функционала следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t)=v_1(t), \dot{x}_2(t)=x_1(t)+v_2(t), \quad t\in[0,2],\\
&\dot{v}_1(t)=u_1(t), \dot{v}_2(t)=u_2(t),\\
&J=\int_0^2\Big(u_1^2(t),u_2^2(t)\Big)dt\to\min.
\end{aligned}$$

Фундаментальную матрицу решений системы уравнений (4) в этом случае возьмем в виде

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}
1 & t & 0 & 0 & -\frac{t^3}{12} & \frac{t^2}{4} & \frac{t^4}{48} & 0\\
t & \frac{t^2}{2} & 1 & t & -\frac{t^4}{48} & \frac{t^3}{12} & -\frac{t^3}{240}(20-t^2) & \frac{t^2}{4}\\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{4} & \frac{t}{2} & \frac{t^3}{12} & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{t^2}{4} & \frac{t}{2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -t & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -t & 1 & \frac{t^2}{2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 1
\end{pmatrix}.$$

Тогда, в силу вышеизложенной теоремы, семейство оптимальных траекторий M рассматриваемой задачи будет иметь следующий вид:

$$M=\left\{\begin{pmatrix}x(t)\\v(t)\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{c}\exists\left(p_1,p_2\right)\in R^2: x_1(t)=f_1(t,p_1,p_2), x_2(t)=f_2(t,p_1,p_2),\\ v_1(t)=g_1(t,p_1,p_2), v_2(t)=g_2(t,p_1,p_2)\end{array}\right\},$$

где

$$f_1(t,p_1,p_2)=\begin{cases}(2t^2-3t+1)tp_1-\dfrac{30}{61}(t-1)^2t^2p_2-\\ \qquad -1-\dfrac{3t^2}{61}(25t^2+72t-158), \quad t\in[0,1],\\ (2t^3-9t^2+13t-6)p_1-\dfrac{30}{61}(t^4-6t^3+13t^2-12t+4)p_2+\\ \qquad +\dfrac{1}{61}(45t^4-148t^3+36t^2+192t-3), \quad t\in[1,2],\end{cases}$$

$$f_2(t,p_1,p_2)=\begin{cases}(t-1)^2\dfrac{t^2}{2}p_1-\dfrac{t}{61}(6t^4-15t^3-110t^2+180t-61)p_2-\\ \qquad -\dfrac{t}{61}(15t^4+54t^3-458t^2+450t+61), t\in[0,1],\\ \dfrac{1}{2}(t^4-6t^3+13t^2-12t+4)p_1-\\ -\dfrac{1}{61}(6t^5-45t^4+10t^3+360t^2-661t+330)p_2+\\ +\dfrac{1}{61}(9t^5-37t^4-168t^3+906t^2+1083t+251), t\in[1,2],\end{cases}$$

$$g_1(t,p_1,p_2)=\begin{cases}(6t^2-6t+1)p_1-\dfrac{60t}{61}(2t^2-3t+1)p_2-\\ \qquad -\dfrac{12t}{61}(25t^2+54t-79), \quad t\in[0,1],\\ (6t^2-18t+13)p_1-\dfrac{60}{61}(2t^3-9t^2+13t-6)p_2+\\ \qquad +\dfrac{12}{61}(15t^3-37t^2+6t+16), \quad t\in[1,2],\end{cases}$$

$$g_2(t,p_1,p_2)=\begin{cases}\left(\dfrac{360t}{61}(t-1)+1\right)p_2+\dfrac{990t}{61}(t-1), \quad t\in[0,1],\\ \dfrac{1}{61}(360t^2-1080t+781)p_2-\dfrac{540}{61}(t^2-3t+2), \quad t\in[1,2].\end{cases}$$

На рис. 1, 2 представлено графическое изображение восьми траекторий полученного семейства оптимальных траекторий M при задании величины скорости прохождения целей (p_1,p_2) соответственно как $(2,0)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(0,2)$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-2,0)$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(0,-2)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Видно, что каждая траектория производит обход заданных целей (рис. 1) и в момент прохода целей имеет одинаковые скорости (рис. 2).

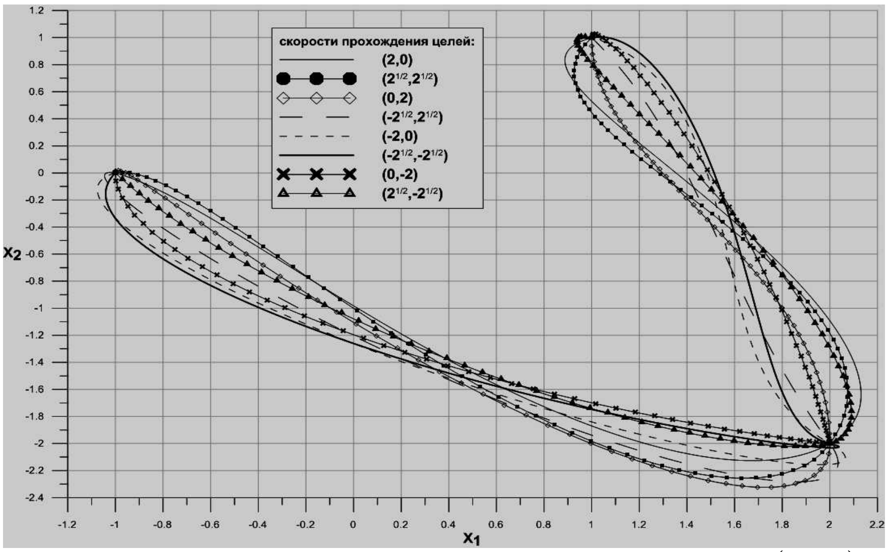

Рис. 1. Семейство оптимальных траекторий в координатах (x_1, x_2)

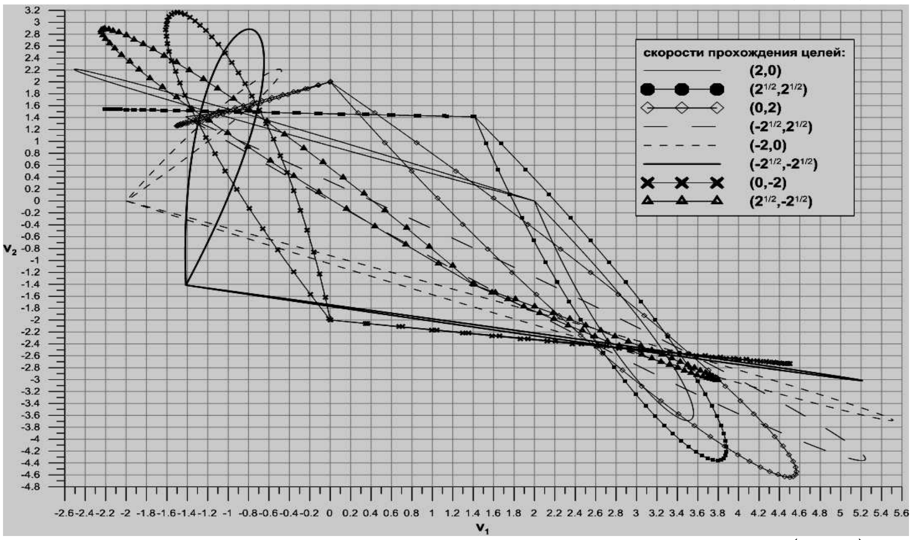

Рис. 2. Семейство оптимальных траекторий в координатах (v_1, v_2)

Функцию $u(t,x)$, синтезирующую данное семейство *M*, можно найти согласно (6), а именно

$$u_1(t,x)=\begin{cases}\delta(t)\Big((18t^4-36t^3+264t^2-246t+61)x_1-\\ -10(6t^3-9t^2+5t-1)x_2+\\ \quad +36t^5-219t^4-438t^3+812t^2-394t+61\Big), \quad t\in(0,1),\\ \gamma(t)\Big(-30t(2t^2-3t+1)x_1+60(4t^2-4t+1)x_2-\\ \qquad\qquad -30t(6t^3-9t^2+25t-6)\Big), \quad t\in(1,2),\end{cases}$$

$$u_2(t,x)=\begin{cases}\delta(t)\Big((18t^4-108t^3+480t^2-954t+625)x_1-\\ -10(6t^3-27t^2+41t-21)x_2-\\ \quad -12t^5+243t^4-976t^3+1176t^2+82t-615\Big), \quad t\in(0,1),\\ \gamma(t)\Big(-30(2t^3-9t^2+13t-6)x_1+60(4t^2-12t+9)x_2+\\ \qquad +30(2t^4-33t^3+125t^2-180t+90)\Big), \quad t\in(1,2),\end{cases}$$

$$\delta(t)=\frac{12}{(t-1)t(3t^4-6t^3+244t^2-241t+61)},$$

$$\gamma(t)=\frac{12}{(t-1)(t-2)(3t^4-18t^3+280t^2-759t+555)}.$$

При этом множество нулей функции $\Phi_1(t)D_1$ на отрезке [0, 1] совпадает с множеством нулей функции $\delta(t)$ и состоит лишь из двух точек $t=0$, $t=1$; множество нулей функции $\Phi_2(t)D_2$ на отрезке [1, 2] совпадает с множеством нулей функции $\gamma(t)$ и также состоит лишь из двух точек $t=1$, $t=2$.

Заключение

Таким образом, в линейно-квадратической задаче оптимального обхода заданных пространственных целей построено множество оптимальных траекторий и явные аналитические выражения для функций, синтезирующих оптимальные траектории, в виде управления с обратной связью. Доказательства вышеперечисленных результатов опираются на результаты работ [6]–[11].

Как частные случаи с помощью описанной процедуры могут быть достаточно просто построены семейства оптимальных траекторий для задачи обхода фиксированных целей на плоскости или в пространстве при известной информации о состоянии системы.

Литература

1. Васильев О. В., Терлецкий В. А. Оптимальное управление краевой задачей // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения: сб. ст. К семидесятилетию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко. Тр. МИАН. М.: Наука, Физматлит, 1995. Т. 211. С. 121–130.

2. Васильева О. О., Мизуками К. Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 95–100.

3. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. О численном решении задач оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2012. Т. 52, № 12. С. 2163–2177.

4. Заманова С. А., Сардарова Р. А., Шарифов Я. А. Градиент для задач оптимального управления с трехточечными краевыми условиями // J. Contemporary Appl. Mathematics. 2014. Т. 3, № 1. С. 69–76.

5. Барсегян В. Р., Барсегян Т. В. Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // АиТ. 2015. № 4. С. 3–15.

6. Трушкова Е. А. Синтез оптимальных траекторий для линейных управляемых систем с неразделенными трехточечными условиями // АиТ. 2016. № 7. С. 6–19.

7. Хромов А. П. О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества // Теория функций и приближений. Тр. 4-й Сарат. зимн. шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. Ч. 1. С. 106–112.

8. Хромов А. П. О задаче синтеза для линейных систем с квадратичным критерием качества // Дифференциальные уравнения и теория функций: сб. науч. трудов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 9. С. 3–14.

9. Корнев В. В. О существовании синтезирующих функций для линейно-квадратичных задач оптимального управления // Математика и ее приложения: межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. С. 44–45.

10. Трушкова Е. А. Синтез оптимальных траекторий, подчиненных граничным условиям, для линейных управляемых систем // АиТ. 2011. № 3. С. 3–14.

11. Трушкова Е. А. Синтез управления в задаче оптимального обхода целей // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 18-й Саратовской зимней школы. Саратов: Научная книга, 2016. С. 284–287.

OPTIMAL TRAJECTORIES IN THE PROBLEM OF TARGETS BYPASS

Ekaterina A. Trushkova
Dr. Sci. (Phys. and Math.),
Leading Researcher, Trapeznikov Institute of Control Sciences, RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russia

Optimal bypass of the given spatial targets at fixed times with the same speed of passes of these targets is formulated as a linear-quadratic optimal control problem. Such dynamic problems often arise when controlling the movement of mechanical systems, aircraft (in particular, unmanned vehicles), robotic manipulators, and so on. We have justified the procedure for constructing an explicit analytical expression for point-to-point control and for optimal trajectories with the corresponding multi-point mixed boundary conditions. The point-to-point control and the corresponding sets of optimal trajectories in this class of bypass problems of the given targets at fixed times with the same speed of passes are simply constructed using the described procedure. In the article we give an example illustrating the optimal trajectories construction in one bypass target problem on the plane with a parametric specification of the fixed passes rates.
Keywords: problem of targets bypass; unmanned vehicle; dynamic system; linear-quadratic problem; optimal trajectory; point-to-point control; mixed boundary conditions.