УДК 510.66
doi: 10.18101/2304-5728-2017-3-32-39

# ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**© Кравченко Вячеслав Александрович**
старший преподаватель,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
E-mail: krawyach@mail.ru

**© Ширапов Дашадондок Шагдарович**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
E-mail: shirapov.dashadondok@yandex.ru

**© Чимитов Доржи Намсараевич**
кандидат физико-математических наук, доцент,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
E-mail: dorji2009@mail.ru

Статья посвящена формальному описанию принципов построения логико-математических моделей динамических систем при использовании аппарата функциональных грамматик. В качестве логической системы применяется лямбда-исчисление, являющееся теоретической основой функциональных грамматик и функциональных языков программирования.

***Ключевые слова:*** математическое моделирование; задача моделирования; база знаний; функциональные грамматики; лямбда-исчисление.

## Введение

Целью статьи является описание метода построения логико-математических моделей динамических систем с использованием функциональных грамматик.

Данный метод включает:

1) описание теории предметной области динамической системы в виде неполной функциональной грамматики;

2) описание задачи моделирования в рамках теории в виде полной функциональной грамматики;

3) построение логико-математической модели в виде суперпозиции функций на основе построения вывода в рамках полной функциональной грамматики.

## 1. Формальное описание задачи логико-математического моделирования динамических систем

В общем виде задача логико-математического моделирования динамических систем может быть задана совокупностью:

$$W = \{\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{Q}\},$$

состоящей из трех множеств:

1) множество понятий и отношений предметной области, составляющих базу знаний:

$$\boldsymbol{K} = \{k_l\},\quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ p;$$

2) множество входных переменных задачи, характеризующих исходные знания о модели:

$$\boldsymbol{D} = \{d_i\},\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r;$$

3) множество выходных переменных задачи, характеризующих цель моделирования:

$$\boldsymbol{Q} = \{q_j\},\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Если задача моделирования разрешима, то её можно представить в виде:

$$\left(\boldsymbol{K};\ d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_r \mapsto q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s\right).$$

Таким образом, логико-математическое моделирование заключается в отображении вектора входных переменных $\boldsymbol{D}$ в вектор выходных параметров $\boldsymbol{Q}$ с помощью соотношений из базы знаний $\boldsymbol{K}$:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{BD},$$

где $\boldsymbol{B}$ – оператор логического вывода, который в случае последовательно-параллельной декомпозиции можно представить в виде:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_{t1} & B_{(t-1)1} & \ldots & B_{21} & B_{11} \\ B_{t2} & B_{(t-1)2} & \ldots & B_{22} & B_{12} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{t(s-1)} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{ts} & B_{(t-1)(g-1)} & \ldots & B_{2(g-1)} & B_{1(g-1)} \\ & B_{(t-1)g} & \ldots & B_{2g} & B_{1g} \end{pmatrix},$$

где $B_{t1},\ B_{(t-1)1},\ \ldots,\ B_{2\mathrm{g}},\ B_{1g},\ g = r \cdot s.$ — операторы отдельных элементарных операций.

## 2. Методы построения логико-математических моделей на основе аппарата функциональных грамматик

Общие идеи представления знаний аппаратом функциональных грамматик и вывода моделей в виде суперпозиции функций представлены в [1] и [2]. Сформулируем основные теоретические аспекты вывода логико-математических моделей, основанных на применении аппарата функциональных грамматик.

**Определение 1**. Неполная контекстно-свободная грамматика – это совокупность:

$$G1' = \{\boldsymbol{V1},\ \boldsymbol{P1}\},$$

состоящая из множества (алфавита) символов:

$$\boldsymbol{V1} = \{c_i\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

и множества правил:

$$\boldsymbol{P1} = \{P1_j\}, \quad j = 1,\ 2,\ \dots,\ m$$

вида:

$$c_j \to \psi_j,$$

где $\psi_j$ — произвольная последовательность символов алфавита, т. е. $\psi_j \in \boldsymbol{V1}^+$, $\boldsymbol{V1}^+$ — множество ненулевых последовательностей символов алфавита $\boldsymbol{V1}$.

**Аксиома 1**. Для математического описания теории динамических систем существует неполная контекстно-свободная грамматика $G1' = \{\boldsymbol{V1},\ \boldsymbol{P1}\}$. При этом символы грамматики $c_i$ обозначают понятия теории, а правила грамматики $P1_j$ — отношения между понятиями в виде формул.

**Определение 2**. Неполная функциональная контекстно-свободная грамматика — это совокупность:

$$G' = \{\boldsymbol{V_{T0}},\ \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{F_0},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{P}\},$$

состоящая из терминального базисного множества (алфавита) символов:

$$\boldsymbol{V_{T0}} = \{b_i\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n_0;$$

множества объединенного множества (алфавита) символов:

$$\boldsymbol{V} = \{a_i\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n_1;$$

множества базисных унарных и бинарных функций:

$$\boldsymbol{F_0} = \{f0_i\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ k_0$$

вида:

$$f0_i = f(x_1,\ x_2) = x_1 b_j x_2,\ \ f0_i = f(x_1) = b_j x_1 \ \text{ или } \ f0_i = f(x_1) = x_1 b_j;$$

множества общих функций:

$$\boldsymbol{F} = \{f_i\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ k$$

вида:

$$f_i = f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p) = \sigma(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p,\ f0_1,\ f0_2,\dots,\ f0_q);$$

множества правил:

$$\boldsymbol{P} = \{P_j\}, \quad j = 1,\ 2,\ \dots,\ m$$

вида:

$$a_j \to \varphi_j\ \{f_i\},$$

где $\varphi_j \in \boldsymbol{V}^+$ — произвольная последовательность символов объединенного алфавита, являющаяся совокупностью фактических параметров аргументов $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p$ функции $f_i$.

**Аксиома 2**. Математическое описание теории динамических систем в виде неполной контекстно-свободной грамматики $G1' = \{\boldsymbol{V1},\ \boldsymbol{P1}\}$ может быть преобразовано в неполную функциональную контекстно-свободную грамматику $G = \{\boldsymbol{V_{T0}},\ \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{F_0},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{P}\}$ за счет выделения из множества $\boldsymbol{V1}$ подмножества $\boldsymbol{V_{T0}}$, $\boldsymbol{V_{T0}} \cup \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V1}$, элементам которого соответствуют базисные функции $f0_k$, через которые выражаются функции $f_i$, описывающие предметную логику правил $P_j$.

**Определение 3**. (Полная) функциональная контекстно-свободная грамматика – это совокупность:

$$G = \{\boldsymbol{V_{T0}},\ \boldsymbol{V_T},\ \boldsymbol{V_N},\ \boldsymbol{F_0},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{P},\ S\},$$

состоящая из множества (алфавита) базисных терминальных символов:

$$\boldsymbol{V_{T0}} = \{V_{T0i}\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n_0;$$

множества (алфавита) терминальных символов:

$$\boldsymbol{V_T} = \{V_{Ti}\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n_{11};$$

множества (алфавита) нетерминальных символов:

$$\boldsymbol{V_N} = \{V_{Ni}\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n_{12};$$

начального нетерминального символа (аксиомы):

$$S \in \boldsymbol{V_N};$$

множества базисных унарных и бинарных функций:

$$\boldsymbol{F_0} = \{f0_i\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ k_0$$

вида:

$$f0_i = f(x_1,\ x_2) = x_1 b_j x_2,\ \ f0_i = f(x_1) = b_j x_1 \ \text{ или } \ f0_i = f(x_1) = x_1 b_j;$$

множества общих функций:

$$\boldsymbol{F} = \{f_i\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ k$$

вида:

$$f_i = f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p) = \sigma(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p,\ f0_1,\ f0_2, \dots,\ f0_q);$$

множества правил:

$$\boldsymbol{P} = \{P_j\}, \quad j = 1,\ 2,\ \dots,\ m$$

вида:

$$a_j \to \varphi_j\ \{f_i\},$$

где $\varphi_j \in \boldsymbol{V}^+$ — произвольная последовательность символов объединенного алфавита, являющаяся совокупностью фактических параметров $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p$ функции $f_i$.

**Аксиома 3**. Задача математического моделирования динамической системы $W = \{\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{Q}\}$ может быть представлена в виде полной функциональной контекстно-свободной грамматики $G = \{\boldsymbol{V_{T0}},\ \boldsymbol{V_T},\ \boldsymbol{V_N},\ \boldsymbol{F_0},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{P},\ S\}$ за счет выделения из обобщенного алфавита $\boldsymbol{V}$ неполной функциональной контекстно-свободной грамматики $G' = \{\boldsymbol{V_{T0}},\ \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{F_0},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{P}\}$ алфавита терминальных символов $\boldsymbol{V_T}$, обозначающих понятия входных переменных $\boldsymbol{D}$, и выбора из оставшегося множества нетерминальных символов $\boldsymbol{V_N}$ ($\boldsymbol{V_T} \cup \boldsymbol{V}_N \equiv \boldsymbol{V}$) аксиомы $S$, обозначающей понятие выходной переменной $q_i$.

**Теорема**. Если задача математического моделирования динамической системы $W = \{\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{Q}\}$ представлена в виде полной функциональной контекстно-свободной грамматики $G = \{\boldsymbol{V_{T0}},\ \boldsymbol{V_T},\ \boldsymbol{V_N},\ \boldsymbol{F_0},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{P},\ S\}$ и для указанной задачи существует решение, то логико-математическая модель может быть построена в виде суперпозиции функций $\sigma = \sigma(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p,\ f_{i(1)},\ f_{i(2)},\ \dots,\ f_{i(q)})$, где $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p\ \in\ \boldsymbol{V_T}$; $f_{(1)},\ f_{(2)},\ \dots, f_{(q)}\ \in\ \boldsymbol{F}$.

При этом функции $f_{(1)},\ f_{(2)},\ \dots, f_{(q)}$ выступают в качестве элементарных операторов последовательно-параллельной декомпозиции $B_{ij}$, а суперпозиция функций $\sigma$ имеет смысл оператора вывода решения $\boldsymbol{B}$.

**Доказательство**. Задача математического моделирования $W = \{\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{Q}\}$ имеет решение лишь в том случае, если цель моделирования в виде выходных переменных $q_j$ может быть выражена через входные переменные $\boldsymbol{D}$ в виде оператора $\boldsymbol{B}$. Т. е., согласно **аксиоме 3,** задача математического моделирования имеет решение, если с помощью применения правил $P_j$ может быть построен полный вывод:

$$S \to \varphi_{V1} \to \varphi_{V2} \to \dots \to \varphi_{V(n-1)} \to \varphi_{Vn} \to \varphi_T,$$

где $\varphi_{V1},\ \varphi_{V2},\ \dots,\ \varphi_{V(n-1)},\ \varphi_{Vn}\ \in\ \left(\boldsymbol{V_T} \cup \boldsymbol{V}_N\right)^+$ – последовательности, содержащие как терминальные, так и нетерминальные символы;
$\varphi_T \in \boldsymbol{V_T}^+$ — последовательность терминальных символов.

Каждому применению правила

$$a_j \to\ \varphi_{Vj}\ \{f_i\},\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

соответствует функция:

$$f_i(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{pi}),$$

где $i$ — номер произвольной функции грамматики, $1 \le i \le k$;
$p_i$ — количество аргументов функции $f_i$.

Первому непосредственному выводу $S \to\ \varphi_{V1}$ соответствует функция:

$$f_{i(1)}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{pi(1)}).$$

Второму непосредственному выводу $\varphi_{V1} \to\ \varphi_{V2}$ соответствует функция:

$$f_{i(2)}(x_{pi(1)+1},\ x_{pi(1)+2},\ \dots,\ x_{pi(1)+pi(2)}).$$

Тогда вывод $S \to \varphi_{V2}$ описывается суперпозицией:

$$f_{i(2)}(x_{pi(1)+1},\ x_{pi(1)+2},\ \dots,x_{pi(1)+pi(2)-1},\ f_{i(1)}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{pi(1)})) =$$
$$= f_{i(2)}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{pi(1)+pi(2)-1},\ f_{i(1)}).$$

В общем случае выводу $S \to \varphi_{Vj}$ соответствует суперпозиция функций:

$$f_{i(j)}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{pi(1)+pi(2)+\dots+pi(j)-j+1},\ f_{i(1)},\ f_{i(2)},\ \dots,\ f_{i(j-1)}).$$

Тогда полный вывод описывается суперпозицией функций:

$$f_{i(n+1)}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{pi(1)+pi(2)+\dots+pi(n+1)-n},\ f_{i(1)},\ f_{i(2)},\ \dots,\ f_{i(n)}) =$$
$$= \sigma(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{pi(1)+pi(2)+\dots+pi(n+1)-n},\ f_{i(1)},\ f_{i(2)},\ \dots,\ f_{i(n+1)}) =$$
$$= \sigma(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p,\ f_{i(1)},\ f_{i(2)},\ \dots,\ f_{i(q)}).$$

где $p = p_{i(1)} + p_{i(2)} + \dots + p_{i(n+1)} - n$ — количество аргументов суперпозиции, $q = n+1$ — количество функций в суперпозиции.

Таким образом, если задача математического моделирования имеет решение, то в представляющей ее функциональной контекстно-свободной грамматике может быть построен полный вывод:

$$S \to \varphi_{V1} \to \varphi_{V2} \to \dots \to \varphi_{V(n-1)} \to \varphi_{Vn} \to \varphi_T,$$

которому соответствует математическая модель в виде суперпозиции функций:

$$\sigma(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p,\ f_{i(1)},\ f_{i(2)},\ \dots,\ f_{i(q)})$$

Теорема доказана.

## 3. Формальное лямбда-описание построения логико-математических моделей на основе функциональных грамматик

Так как теоретической основой функциональных грамматик является лямбда-исчисление, то вывод логико-математической модели формально представляется в виде совокупности лямбда-функций.

Для примера приведем лямбда-функции для построения полной функциональной грамматики $G = \{\boldsymbol{V_{T0}},\ \boldsymbol{V_T},\ V_N,\ \boldsymbol{F_0},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{P},\ S\}$ на основе задачи моделирования динамических систем $W = \{\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{Q}\}$. Используем при этом принципы чистого лямбда-исчисления, которые приведены, например, в [3] и [4].

$Tr = \lambda x.\lambda y.x$ — логическое значение true;

$Fl = \lambda x.\lambda y.y$ — логическое значение false;

$If = \lambda p.\lambda x.\lambda y.p\ x\ y$ — функция условного оператора;

$Nu = \lambda t.t(\lambda x.\lambda y.Fl)$ — функция проверки пустого списка;

$Nl = \lambda x.Tr$ — пустой список;

$Cs = \lambda x.\lambda y.\lambda s.s\ x\ y$ — функция-конструктор списка;

$Cr = \lambda t.t\ Tr$ — функция-селектор первого элемента списка;

$Cd = \lambda t.t\ Fl$ — функция-селектор хвоста списка.

Функции построения базы знаний в виде неполной функциональной грамматики:

$$G' = \left[\lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda p.\lambda q.Cs\ x(Cs\ y(Cs\ z(Cs\ p\ (Cs\ q\ Nl))))\right]\ V_{T0}\ V\ F_0\ F\ \ P;$$

$$K = \left[\lambda x.x\right]G'.$$

Функция построения списка задачи моделирования:

$$W = \left[\lambda x.\lambda y.\lambda z.Cs\ x(Cs\ y\ (Cs\ z\ Nl))\right]K\ D\ Q.$$

Функции вывода полной функциональной грамматики на основе задачи моделирования:

$$Vn = Y[\lambda f.\lambda p.\lambda q.If\ (Nu\ p)\ Nl\ (If\ (Vn1\ q\ (Cr\ p))\ (f\ (Cd\ p\ q))$$
$$(Cn\ (Cr\ p)\ (f\ (Cd\ p)\ q)))];$$

$$Vn1 = Y[\lambda f.\lambda p.\lambda q.If\ (Nu\ r)\ Fl\ (If\ (=(Cr\ r)\ t)\ Tr\ (f\ (Cd\ r)\ t))];$$

$$G1 = \lambda x.Cn\ \left(Cr\ (Cr\ x)\right)\ (Cn\ \left(Cr\ (Cd\ (Cr\ x))\right)\ (Cn\ (Vn\ \left(Cr\ (Cd\ (Cr\ x))\right)$$
$$\left(Cr\ (Cd\ x)\right))\ (Cn\ \left(Cr\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ (Cr\ x))))\right)$$
$$(Cn\ \left(Cr\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ (Cr\ x)))))\right)$$
$$(Cn\ \left(Cr\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ (Cr\ x))))))\right)\ Nl))))));$$

$$G2 = Y[\lambda f.\lambda x.\lambda y.If\ (Nu\ y)\ Nl\ (Cn\ (Cr\ x)\ (Cn\ (Cr\ (Cd\ x))$$
$$(Cn\ (Cr\ (Cd\ (Cd\ x)))\ (Cn\ (Cr\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ x))))$$
$$(Cn\ (Cr\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ x)))))(Cn\ (Cr\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ (Cd\ x))))))$$
$$(Cn\ (Cr\ y)\ \left(f\ x\ (Cd\ y)\right))))))))];$$

$$G = \left[\lambda x.G2\ \left(G1\ x\right)\ \left(Cr\ (Cd(Cd\ x))\right)\right]\ W.$$

## Заключение

Использование функциональных грамматик в логико-математическом моделировании формально описывается в функциях лямбда-исчисления. Так как лямбда-исчисление является теоретической основой всех современных функциональных языков программирования, то логико-математическая моделирование может быть эффективно реализовано на функциональном языке программирования. Кроме того, сама логико-математическая модель в этом случае принимает вид предметно-логической модели, представляющей собой функциональную программу компьютерного моделирования динамической системы.

## Литература

1. Кравченко В. А., Могнонов П. Б., Чимитов Д. Н. Представление знаний в функциональных грамматиках // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. М. Ф. Решетнева. 2011. №5(38). С. 55–61.

2. Кравченко В. А. Моделирование поиска решения с помощью функциональных грамматик // Вестник Бурятского государственного универ-

ситета. 2012. № 9. С. 33–41.

3. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 606 с.

4. Кубенский А. А. Функциональное программирование.М.: Юрайт, 2017. 348 с.

FORMAL DESCRIPTION OF FUNCTIONAL LOGICAL-MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC SYSTEMS

*Vyacheslav A. Kravchenko*
Senior Lecturer,
East Siberian State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Russia, Ulan-Ude 670013, Russia
E-mail: krawyach@mail.ru

*Dashadondok Sh. Shirapov*
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
East Siberian State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Russia, Ulan-Ude 670013, Russia
E-mail: shirapov.dashadondok@yandex.ru

*Dorzhi N. Chimitov*
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
East Siberian State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Russia, Ulan-Ude 670013, Russia
E-mail: dorji2009@mail.ru

The article presents a formal description of the principles of building logical-mathematical models for dynamic systems using the apparatus of functional grammars. Lambda calculus, which is the theoretical basis of functional grammars and functional programming languages, has been used as a logical system.

*Keywords:* mathematical modeling; modeling problem; knowledge base; functional grammars; lambda calculus.