УДК 517.948
doi: 10.18101/2304-5728-2017-3-73-77

ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ТИПА

© Шишкин Геннадий Александрович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский государственный университет
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

В статье, используя функцию гибкой структуры, исследуется возможность решения линейных краевых задач дифференциальных уравнений с функциональными запаздываниями неопределенного типа.

Ключевые слова: краевая задача; дифференциальные уравнения; разрешающее уравнение; функция гибкой структуры; неопределенный тип уравнений.

Введение

В работе [3] задача Коши для всех дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры [1] – [2] преобразуется к разрешающему интегральному уравнению типа Вольтерра с обыкновенным аргументом.

Так как функция гибкой структуры содержит начальные условия, то ее применение к решению краевых задач напрямую невозможно. Поэтому в работе [4] получена другая модификация функции гибкой структуры для решения краевых задач.

В работе исследуем возможность преобразований линейной краевой задачи для одного вида дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом неопределенного типа. Неопределенность в определении типа уравнения возникает при отсутствии в уравнениях функции и ее производных от аргумента x.

Постановка задачи и ее решение

Выпишем общий вид одного класса уравнений неопределенного типа с запаздывающим аргументом

$$y^{(n)}(u_l(x))+\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x)y^{(i)}(u_j(x))=f(x), \tag{1}$$

где $u_j(x)\le x \quad \forall j=\overline{1,l}$ и $u_j(x)\not\equiv x$, функции $u_j(x)$, $f_{ij}(x)$, и $f(x)$ — непрерывны на отрезке $a\le x\le b$.

Определим начальные функции и линейные краевые условия

$$y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0)\varphi^{(i)}(u_j(x)), \quad i=\overline{0,n-1}, \quad x \in E_{x_0}, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{i\tau}y^{(i)}(x_0)+\beta_{i\tau}y^{(i)}(x_1)] = \gamma_\tau, \ \tau=\overline{0,n-1}, \ a \le x_0 < x_1 \le b, \qquad (3)$$

где $E_{x_0} = \bigcup\limits_{j=0}^{l} E_{x_0}^j$, $E_{x_0}^j$ — множество точек, для которых соответствующие $u_j(x) \le x_0$ при $x \ge x_0$ $\forall j=\overline{1,l}$, а $E_{x_0}^0 = [a, x_0]$.

Предполагая, что решение задачи (1), (2), (3) существует и единственно, будем искать ее решение на отрезке $x \in [x_0, b]$, применив для преобразований новую модификацию функции гибкой структуры [4]

$$y^{(i)}(u_j(x)) = D^{-1}\{\sum_{s=1}^{n}\frac{d^i\Delta_s(u_j(x)-x_0)}{dx^i}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}[\gamma_\tau -$$

$$-D^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu(t)dt]+$$

$$+\int_{x_0}^{u_j(x)}\frac{\partial^i\Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i}\mu(t)dt\} + \delta_i u_j'^n(x)\mu(u_j(x)), \qquad (4)$$

где $i=\overline{0,n}$ $j=\overline{0,l}$ $\delta_n=1$, $\delta_i=0$ $\forall i=\overline{0,n-1}$, $D=D(r_1,r_2,\dots,r_n)$ — определитель Вандермонда, составленный из неопределенных параметров $r_1,r_2,\dots,r_n$, которые определяются в ходе решения задачи исходя из оптимальности ее решения, определители $\Delta_s(x-t), s=\overline{1,n}$ получаются из определителя D заменой s-й строки строкой $\exp r_1(x-t), \exp r_2(x-t),\dots,\exp r_n(x-t)$, $\mu(x)$ — новая неизвестная функция и ω — главный определитель системы, полученной при отыскании начальных значений с использованием краевых условий

$$\omega = \det\left[\alpha_{i\tau}+\beta_{i\tau}D^{-1}\Delta_{i+1}^{(i)}(x_1-x_0)\right], \ i,\tau=\overline{0,n-1}, \qquad (5)$$

а $\omega_{i\tau}$ — алгебраические дополнения к элементам главного определителя.

Обозначим через c_j наименьшие из корней уравнений $u_j(x)=x_0$ на отрезке $x \in [x_0, b]$, если же таковых нет, то полагаем соответствующие $c_j = b$.

При построении разрешающего уравнения поставленной краевой задачи с помощью новой модификации функции гибкой структуры и ее производных (4), как и для уравнений запаздывающего типа [5], могут возникнуть три возможных ситуации:

1. $x_0 < x_1 \le c_j \quad \forall j = \overline{0,l}$; **2**. $x_0 < c_j \le x_1 \quad \forall j = \overline{0,l}$; **3**. x_1 таково, что $\exists j = \overline{0,l}$, что для некоторых выполняется условие **1**., для других **2**.

Первый случай наиболее простой, напрямую сводящийся к решению задачи Коши.

Во втором и третьем случаях подставим функцию гибкой структуры и ее производные (4) в уравнение (1). Затем перенесем известные выражения в правую часть уравнения, проведем преобразования выражений под знаками интегралов, содержащих неизвестную функцию $\mu(x)$. Заменив переменную η на t получим разрешающее интегральное уравнение смешанного типа Вольтерра-Фредгольма с запаздывающим аргументом

$$u_l'''(\mathrm{x})\mu(u_l(x)) + \sum_{j=0}^{l}\left[\int_{x_0}^{x_1} G_j(x,t)\mu(t)dt + \lambda\int_{x_0}^{u_j(x)} H_j(x,t)\mu(t)dt\right] = F(\mathrm{x}), \quad (6)$$

где для ядер $G_j(x,t)$, $H_j(x,t)$ и свободной функции $\mathrm{F}(x)$ получены определенные формулы. Уравнение (6) легко преобразуется к уравнению с обыкновенным аргументом, если ввести новую переменную $z = u_l(x)$. Тогда $x = u_l^{-1}(\mathrm{z})$, где $u_l^{-1}(z)$ — обратная функция для функции $u_l(x)$.

Далее, поделив разрешающее уравнение (6) на $u_l'''(\mathrm{x}) \ne 0$, введем новые обозначения для известных функций и ядер

$$T_j(z,t) = (u_l' \ (u_l^{-1}(\mathrm{z}))^{-n} G_j(u_l^{-1}(\mathrm{z})), \quad Q_j(z,t) = (u_l' \ (u_l^{-1}(\mathrm{z}))^{-n} H_j(u_l^{-1}(\mathrm{z})),$$

$R(z) = (u_l' \ (u_l^{-1}(\mathrm{z}))^{-n} F(u_l^{-1}(\mathrm{z}))$ и положив $v_j(z) = u_j(u_l^{-1}(z))$, получим интегральное уравнение с обыкновенным аргументом

$$\mu(z) + \sum_{j=0}^{l}\left[\int_{x_0}^{x_1} T_j\ (z,t)\mu(t)dt + \lambda\int_{x_0}^{v_j(z)} Q_j(z,t)\mu(t)\,dt\right] = R(\mathrm{z}).$$

Пример.

Найти решение краевой задачи для уравнения первого порядка неопределенного типа

$$y'(\frac{x}{2}) - y(\sin x) = \frac{\pi}{8} - \sin x,$$

$$y(x) = y(\frac{x}{2}) = y(\sin x) = y(0), \quad на \quad E_{x_0},$$

$$y(0) + y(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

Решение:

Начальное множество состоит из одной точки $E_{x_0} = [0]$. Выпишем новую модификацию функции гибкой структуры (4) для данной задачи при

$i=0,\ j=0$ и, предварительно вычислив выражения для ω и ω_{00} по формулам (5), найдем выражение функции гибкой структуры для решения данной задачи

$$y(x)=\frac{e^{rx}}{1+e^{r\frac{\pi}{4}}}\left[1-\int_0^{\pi/4} e^{r(\frac{\pi}{4}-t)}\mu(t)\,dt\right]+\int_0^x e^{r(x-t)}\mu(t)dt.$$

С целью сокращения объема выкладок положим $r=0,$ тогда выражения функции гибкой структуры упростятся

$$y(x)=\frac{1}{2}\left[1-\int_0^{\pi/4}\mu(t)\,dt\right]+\int_0^x\mu(t)dt,\quad y(\frac{x}{2})=\frac{1}{2}\left[1-\int_0^{\pi/4}\mu(t)\,dt\right]+\int_0^{x/2}\mu(t)dt,$$

$$y(\sin x)=\frac{1}{2}\left[1-\int_0^{\pi/4}\mu(t)\,dt\right]+\int_0^{\sin x}\mu(t)dt,\quad y'(\frac{x}{2})=\frac{1}{2}\mu(\frac{x}{2}).$$

Подставив найденные выражения $y(\sin x)$ и $y'(\frac{x}{2})$, в исходное уравнение получим разрешающее уравнение

$$\mu(\frac{x}{2})+\int_0^{\pi/4}\mu(t)dt-2\int_0^{\sin x}\mu(t)dt=1+\frac{\pi}{4}-2\sin x.$$

Затем, произведя замену переменной $\frac{x}{2}=z,\ \ x=2z$, получим разрешающее интегральное уравнение с обыкновенным аргументом

$$\mu(z)+\int_0^{\pi/4}\mu(t)dt-2\int_0^{\sin 2z}\mu(t)dt=1+\frac{\pi}{4}-2\sin x,$$

с решением $\mu(z)=1.$

Подставив это значение $\mu(z)=1$ в выражение функции гибкой структуры, полученное для данной краевой задачи, найдем решение первоначально поставленной задачи. Ответ: $y(x)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}+x.$ Нетрудно проверить, что условия краевой задачи выполняются.

Заключение

В журнальной литературе имеются работы, которые затрагивают многие вопросы решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, но мало работ, которые бы решали проблему преобразования краевых задач для таких уравнений к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом. В статье исследованы возможности построения модели с обыкновенным аргументом для краевой задачи одного вида дифференциальных уравнений неопределенного типа. Для всех уравнений запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры этот вопрос решен положительно [5]. Для уравнений нейтрального и опережающего типов такое преобразование возможно только для некоторых классов уравнений. Полученные аналитические выражения модели начальной задачи дают возможность оптимизировать нахождение ее точного или приближенного решений за счет оптимального выбора параметров функции гибкой структуры и разработать программу решения поставленных задач на ЭВМ. Этому и будут посвящены дальнейшие исследования и разработки программ.

Литература

1. Куликов Н. К. Инженерный метод решения и исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1964. 207 с.
2. Куликов Н. К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой // Тематический сб. МТИПП. М.,1974. С. 47–57.
3. Шишкин Г. А. Исследование и решение начальных задач для линейных дифференциальных уравнений с функциональным запаздыванием: монография. Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2011. 68 с.
4. Шишкин Г. А. Построение новой модификации функции гибкой структуры для решения краевых задач дифференциальных уравнений с функциональными запаздываниями // Математика, ее приложения и математическое образование: материалы междунар. конф. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2014. С. 351–355.
5. Шишкин Г.А. Решение краевых задач дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2015. № 1. С. 11–15.

LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF INDEFINITE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Gennadiy A. Shishkin
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Buryat State University, 24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

In the article using a function of flexible structure we study the possibility for solving linear boundary value problems of delay differential equations of indefinite type.

Keywords: boundary value problem; differential equations; resolving equation; flexible structure function; indefinite type of equations.