# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.95
doi: 10.18101/2304-5728-2017-4-3-8

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

**© Геккиева Сакинат Хасановна**
кандидат физико-математических наук,
заведующий отделом
Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарский научный центр РАН
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а
E-mail: gekkieva_s@mail.ru

**© Керефов Марат Асланбиевич**
кандидат физико-математических наук, доцент
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: kerefov@mail.ru

В работе рассматривается краевая задача для нагруженного параболического уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля с прямым и обратным ходом времени в прямоугольной области. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. Вопрос разрешимости задачи редуцируется к вопросу разрешимости обобщенного уравнения Абеля, и, соответственно, разрешимости сингулярного интегрального уравнения.

***Ключевые слова:*** смешанно-параболическое уравнение; задача Жевре; нагруженное уравнение; оператор дробного интегро-дифференцирования Римана — Лиувилля; уравнение дробной диффузии; функция типа Райта; интегральное уравнение Вольтерра; уравнение Абеля; условие Гёльдера.

### Введение

Параболические уравнения с меняющимся направлением времени стали предметом исследований в теории уравнений смешанного типа достаточно давно.

Первыми работами, посвященными параболическим уравнениям с меняющимся направлением эволюции, были работы М. Жевре (см., например, [1]).

Краевые задачи для уравнений смешанно-параболического типа рассмотрены в работах А. А. Керефова [2, 3], В. В. Кислова [4], А. М. Нахушева [5, с. 49], С. В. Попова [6], С. А. Терсенова [7] и других авторов.

В монографии А. М. Нахушева [8] исследованы нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка, в том числе применение нагруженных уравнений, как метода исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью.

Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения дробного порядка, содержащего след от искомого решения, были объектом исследования в работах [9, 10].

В настоящей работе рассматривается задача Жевре для нагруженного уравнения дробной диффузии с прямым и обратным ходом времени в прямоугольной области.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,y)+\lambda u(0,t)=\begin{cases} D_{0y}^{\alpha}u(x,y), & x>0, \\ D_{hy}^{\alpha}u(x,y), & x<0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda = \text{const}$, $0<\alpha<1$, $D_{st}^{\nu}$ – оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля порядка $\nu$ [11, с. 28].

Пусть $\Omega=\Omega^{+}\cup\Omega^{-}\cup AB$, где $\Omega^{+}=\{(x,y):\ 0<x<r,\quad 0<y<h\}$, $\Omega^{-}=\{(x,y):\ -r<x<0,\ 0<y<h\}$, $AB=\{(0,y):\ 0<y<h\}$.

Решение $u(x,y)$ уравнения (1) назовем регулярным в $\Omega$, если оно непрерывно вместе с производными $u_x$, $D_{\alpha}^{0y}u$ и удовлетворяет условию Гёльдера по совокупности переменных $x$ и $y$ с показателем $\lambda>\beta$, $\beta=\alpha/2$.

**Задача G.** *Найти регулярное решение уравнения* (1):

$$u(x,y)=\begin{cases} u^{+}(x,y), & x\in\Omega^{+}, \\ u^{-}(x,y), & x\in\Omega^{-}, \end{cases}$$

*удовлетворяющее в областях* $\Omega^{+}$, $\Omega^{-}$, *начальным условиям*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u^{+}(x,y)=\varphi_1(x),\quad 0<x<r, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to h} D_{hy}^{\alpha-1}u^{-}(x,y)=\varphi_2(x),\quad -r<x<0, \tag{3}$$

*краевым условиям*

$$u^{+}(r,y)=\psi_1(y),\quad 0\le y\le h, \tag{4}$$

$$u^{-}(-r,y)=\psi_2(y),\quad 0\le y\le h, \tag{5}$$

*и условиям сопряжения*

$$u^{+}(0,y)=u^{-}(0,y),\quad u_x^{+}(0,y)=u_x^{-}(0,y),\quad 0<y<h.$$

*Здесь* $y^{1-\alpha}u$, $u_{xx}$, $u_y \in C(\Omega)$; *функции* $u(x,y)$, $u_x(x,y)$, $\varphi_1(x) \in C[0,r)$, $\varphi_2(x) \in C(-r,0]$, $\psi_1(y) \in C[0,h]$, $\psi_2(y) \in C[0,h]$ *– заданные функции.*

Единственность задачи следует из принципа экстремума для оператора дробного дифференцирования [12, с. 104].

Исследуем вопрос существования решения задачи G.

Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи G и

$$\tau(y) = u(0,y), \tag{6}$$

$$u_x(0,y) = \nu(y), \tag{7}$$

$\tau(y) \in C^1\,]0,h] \cap C[0,h], \nu(y) \in C\,]0,h] \cap L[0,h]$.

Воспользовавшись представлением решения смешанной задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля [9], получим представление решения уравнения (1) в области $\Omega^+$, удовлетворяющее условиям (2), (4), (6), (7), в виде

$$u^+(x,y) = -\int_0^y G^+(x,y,0,\eta)\nu(\eta)d\eta + \int_0^r G^+(x,y,\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi -$$

$$-\int_0^y G^+_\xi(x,y,r,\eta)\psi_1(\eta)d\eta - \lambda\int_0^y\int_0^r \tau(y)G^+(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{8}$$

$$G^+(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\left[e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi|}{(y-\eta)^\beta}\right) + e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right],$$

где $e^{1,\beta}_{1,\beta}(z)$ — функция типа Райта [13, с. 23].

При $x \to 0$ для функции $\tau(y) = u(0,t)$ получим интегральное уравнение

$$\tau(y) - \lambda\int_0^y \tau(\eta)K_1(y,\eta)d\eta = F_1(y) \tag{8}$$

с ядром

$$K_1(y,\eta) = (y-\eta)^{\beta-1}k_1(y,\eta),$$

$$k_1(y,\eta) = -\int_0^r e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|\xi|}{(y-\eta)^\beta}\right)d\xi,$$

и правой частью

$$F_1(y) = -\int_0^y G^+(0,y,0,\eta)\nu(\eta)d\eta + \int_0^r G^+(0,y,\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi -$$

$$-\int_0^y G^+_\xi(x,y,r,\eta)\psi_1(\eta)d\eta.$$

Нетрудно видеть, что в области $\Omega^-$ искомое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3), (5)–(7), допускает представление

$$u^-(x,y)=\int_y^h G^-(x,y,0,\eta)\nu(\eta)d\eta+\int_{-r}^0 G^-(x,y,\xi,0)\varphi_2(\xi)d\xi-$$
$$-\int_y^h G_\xi^-(x,y,-r,0)\psi_2(\eta)d\eta-\lambda\int_y^h\int_{-r}^0 \tau(y)G^-(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta\,, \qquad (9)$$

где $G^-(x,y,\xi,\eta)=G^+(-x,h-y,-\xi,h-\eta)$.

Из (10) при $x\to 0$ получим интегральное уравнение

$$\nu(y)-\int_y^h G_x^-(0,y,0,\eta)\nu(\eta)d\eta=F_2(y)\,, \qquad (10)$$

где

$$F_2=-\int_{-r}^0 G_x^-(0,y,\xi,0)\varphi_2(\xi)d\xi-\int_y^h G_{\xi x}^-(0,y,-r,0)\psi_2(\eta)d\eta-$$
$$-\lambda\int_y^h\int_{-r}^0 \tau(y)G_x^-(0,y,\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

При $x\to 0$ из (8) и (10), принимая во внимание, что $u^+(0,y)=u^-(0,y)$, получим

$$-\int_0^y G^+(0,y,0,\eta)\nu(\eta)d\eta+\int_0^r G^+(0,y,\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi-$$
$$-\int_0^y G_\xi^+(0,y,r,\eta)\psi_1(\eta)d\eta-\lambda\int_0^y\int_0^r \tau(y)G^+(0,y,\xi,\eta)d\xi d\eta= \qquad (11)$$
$$=\int_y^h G^-(0,y,0,\eta)\nu(\eta)d\eta+\int_{-r}^0 G^-(0,y,\xi,0)\varphi_2(\xi)d\xi-$$
$$-\int_y^h G_\xi^-(0,y,-r,0)\psi_2(\eta)d\eta-\lambda\int_y^h\int_{-r}^0 \tau(y)G^-(0,y,\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Таким образом, вопрос существования задачи G эквивалентно редуцирован к вопросу существования системы интегральных уравнений (9), (11) и (12).

Пусть $H_1(y,\eta)$ — резольвента ядра $K_1(y,\eta)$, а $H_2(y,\eta)$ — резольвента ядра $G_x^-(0,y,0,\eta)$. Тогда единственные решения уравнений Вольтерра (9) и (11) представимы в виде

$$\tau(y)=-\int_0^y G^+(0,y,0,\eta)\nu(\eta)d\eta+\int_0^r G^+(0,y,\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi-$$
$$-\int_0^y G_\xi^+(x,y,r,\eta)\psi_1(\eta)d\eta++\lambda\int_0^r H_1(y,\eta)\left\{-\int_0^y G^+(0,y,0,\eta)\nu(\eta)d\eta+\right. \qquad (13)$$

$$+\lambda\int_0^r H_1(y,\eta)\left\{+\int_0^r G^+(0,y,\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi-\int_0^y G_\xi^+(x,y,r,\eta)\psi_1(\eta)d\eta\right\}d\eta,$$

$$\nu(y)=-\int_{-r}^0 G_x^-(0,y,\xi,0)\varphi_2(\xi)d\xi-\int_y^h G_{\xi x}^-(0,y,-r,0)\psi_2(\eta)d\eta-$$

$$-\lambda\int_y^h\int_{-r}^0 \tau(y)G_x^-(0,y,\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_y^h H_2(y,\eta)\left\{-\int_{-r}^0 G_x^-(0,y,\xi,0)\varphi_2(\xi)d\xi-\right. .(12)$$

$$\left.-\int_y^h G_{\xi x}^-(0,y,-r,0)\psi_2(\eta)d\eta-\lambda\int_y^h\int_{-r}^0 \tau(y)G_x^-(0,y,\xi,\eta)d\xi d\eta\right\}d\eta\ .$$

В силу (13) и (14) из равенства (12) получим обобщенное уравнение Абеля, которое можно редуцировать к сингулярному интегральному уравнению нормального типа.

Итак, единственное решение задачи G определяется с помощью (13) и (14).

## Заключение

Итак, в работе исследован вопрос однозначной разрешимости задачи Жевре для нагруженного уравнения диффузии дробного порядка с прямым и обратным ходом времени в ограниченной области в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. Воспользовавшись представлением решения смешанной краевой задачи для нагруженного диффузионно-волнового с дробной производной Римана — Лиувилля, вопрос разрешимости поставленной задачи редуцируется к вопросу разрешимости обобщенного уравнения Абеля.

## Литература

1. Gevrey M. Sur les equations aux derives partielles du type parabolique // J. Math. App. 1913. T. 9, sec. 6. P. 305–475.

2. Керефов А. А. Задача Жевре для одного смешанно-параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1977. Т. XIII, № 1. С. 76–83.

3. Керефов А. А. Об одной краевой задаче Жевре для параболического уравнения со знакопеременным разрывом первого рода у коэффициента при производной по времени // Дифференц. уравнения. 1974. Т. X, № 1. С. 69–77.

4. Кислов Н. В., Червяков А. В. Краевая задача с меняющимся направлением времени // Вестник МЭИ. 2002. № 6. С. 62–67.

5. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука. 2006. 287 с.

6. Попов С. В. О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1991. Вып. 102. С. 100–113.

7. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 301 с.

8. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

9. Геккиева С. Х. Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2016. Вып. 42, № 6 (227). С. 32–35.

10. Геккиева С. Х., Керефов М. А. Смешанные краевые задачи для нагруженного уравнения с дробной производной // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы III Междунар. конф. Нальчик, 2006. С. 80–82.

11. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 105 с.

12. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

13. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

## BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LOADED EQUATION OF FRACTIONAL ORDER WITH FORWARD AND BACKWARD TIME STEPPING

*Sakinat Kh. Gekkieva,*
Cand. Sci. (Phys. and Math.),
Institute of Applied Mathematics and Automation,
Kabardino-Balkarian Scientific Center RAS
89a Shortanova St., Nalchik 360000, Russia

*Marat A. Kerefov,* Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.
Berbekov Kabardino-Balkarian State University
173 Chernyshevskogo St., Nalchik 360004, Russia

The article considers a boundary value problem for the loaded parabolic equation involving the Riemann – Liouville derivative with forward and backward time stepping in a rectangular domain. It is proved that the problem is uniquely solvable for the class of functions satisfying the Holder condition. The issue on the solvability of the problem can be reduced to the solvability of the generalized Abel equation, and therefore to the solvability of the singular integral equation.

*Keywords*: mixed parabolic equation; the Gevrey problem; loaded equation; the Riemann-Liouville fractional integral operator; fractional diffusion equation; the Volterra integral equation; the Wright-type function, the Abel equation, the Holder condition.