УДК 519.64, 517.51
doi: 10.18101/2304-5728-2017-4-33-41

ОБЩИЙ ВИД ФИНИТНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПОГРЕШНОСТИ ЭРМИТОВЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $L_p^m\left(E_n\right)$

© Цыренжапов Нима Булатович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский государственный университет
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: nimac@mail.ru

© Урбаханов Александр Валерьевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
E-mail: urbahanov@mail.ru

В данной работе рассматриваются кубатурные формулы общего вида, в которые входят значения функции и ее производных, приводится общее представление финитных функционалов этих формул.

Ключевые слова: кубатурные формулы; функционал погрешности; пространство Соболева; приближенное интегрирование; обобщенная функция; формула Тейлора; гармонический оператор; численное интегрирование.

Введение

В работах С.Л. Соболева был установлен общий вид функционала погрешности в гильбертовом пространстве. В дальнейшем обобщены его учениками Ц.Б. Шойнжуровым, В.И. Половинкиным, М.Д. Рамазановым, В.Л. Васкевичем и др., на другие функциональные пространства.

В.И. Половинкин в своих работах исследовал общий вид как произвольных, так и финитных функционалов погрешности в пространстве $L_p^m\left(E_n\right)$ [3].

В данной работе рассматривается общий вид финитного функционала погрешности в пространстве С.Л. Соболева $L_p^m\left(E_n\right)$ с естественной нормой

$$\|\varphi(x)\|_{L_p^m} = \left[\int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| D^\alpha \varphi(x) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (1)$$

В отличие от работ В.И. Половинкина [2], [3], используется другой подход.

1. Постановка задачи

Введем обозначения. Пусть $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ — точка n-мерного пространства E_n, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ — n-мерный целочисленный вектор, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, ...x_n)$ — функция, определенная на E_n, $D^{\alpha}\varphi(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ — ее частные производные порядка $|\alpha|$, ρ — наивысший порядок старших производных $D^{\alpha}\varphi(x)$, Ω — ограниченная область в E_n с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \Gamma(\Omega)$, $B_m = \left\{\gamma \in E_n, 0 \le \gamma_i < m, i = 1,2,...,n, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \le m\right\}$ — ньютоновская система узлов, B_1 — множество индексов α значений функций и ее производных порядка не выше ρ. $D^{\alpha}\varphi(\gamma)$ — совокупность значений функций и ее производных в одной точке.

Кубатурная формула общего вида с ньютоновской системой узлов для области Ω задается приближенным равенством [4]

$$\int_{\Omega} \varphi(x)dx \cong \sum_{\gamma \in B_m} \sum_{\alpha \in B_1} C_{\gamma}^{\alpha} D^{\alpha}\varphi(\gamma) \tag{2}$$

и функционал погрешности формулы (1) определяется равенством

$$\langle l_{\Omega}, \varphi \rangle = \int_{E_n} \left[\varepsilon_{\Omega}(x) - \sum_{\gamma \in B_m} \sum_{\alpha \in B_1} C_{\gamma}^{\alpha} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \delta(x-\gamma) \right] \varphi(x)dx\,. \tag{3}$$

Известно, [1] что при $pm > n$ и $0 \le |S| < m - \frac{n}{p}$ частная производная $D^{S}\varphi(x)$ непрерывна при $\rho = m - \left[\frac{n}{p}\right] - 1$, пространство $L_p^m(E_n)$ вложено в пространство непрерывных дифференцируемых функций $C^{\rho}(E_n)$.

Условие вложения $L_p^m(E_n)$ в $C^{\rho}(E_n)$ имеет вид

$$p(m - |S|) > n \text{ и } |S| \le \rho\,. \tag{4}$$

2. Основные результаты

Отметим, что доказательства лемм проводятся по схеме работы Шойнжурова Ц.Б. [6]. Однако свертка $D^{\alpha}G(x)*l_{\Omega}(x)$ в функционале общего вида имеет более высокую особенность в узлах γ [5].

Лемма. *Пусть* $1<p<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ p(m-|S|)>n,\ |S|\le\rho,\ pm>n$ *и* $\varphi_0(x)\in L_{p'}^m$. *Тогда полигармонический оператор* Δ^m *переводит функцию* $\varphi_0(x)$ *в обобщенную функцию* $\Delta^m\varphi_0(x)=(-1)^m l_{\Omega}(x)\in L_p^{m*}$ *и выражение*

$$\left\langle l_{\Omega}(x),\varphi(x)\right\rangle=\int\limits_{E_n}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}D^{\alpha}\varphi_0(x)D^{\alpha}\varphi(x)dx \qquad (5)$$

представляет собой ограниченный линейный функционал над пространством L_p^m.

Доказательство.

Пусть $\forall\varphi(x)\in L_p^m$ *и* $\varphi_h(x)$ — средняя функция для нее. Рассмотрим выражение [5]

$$\left\langle l_{\Omega}(x),\varphi_h(x)\right\rangle=\int\limits_{E_n}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}D^{\alpha}\varphi_0(x)D^{\alpha}\varphi_h(x)dx. \qquad (6)$$

Интегрируя по частям выражение в правой части, получим

$$\begin{aligned}\left\langle l_{\Omega}(x),\varphi_h(x)\right\rangle&=\int\limits_{E_n}\sum_{|\alpha|=m}\left(-1\right)^m\frac{m!}{\alpha!}D^{2\alpha}\varphi_0(x)\varphi_h(x)dx=\\&=\int\limits_{E_n}(-1)^m\Delta^m\varphi_0(x)\varphi_h(x)dx=\int\limits_{E_n}l_{\Omega}(x)\varphi_h(x)dx\qquad\forall\varphi(x)\in L_p^m.\end{aligned} \qquad (7)$$

Левая часть имеет предел, при $h\to 0$ равный $\left\langle l_{\Omega}(x),\varphi(x)\right\rangle$, следовательно, правая часть также имеет предел и $\int\limits_{E_n}l_{\Omega}(x)\varphi(x)dx$ существует для $\varphi(x)\in L_p^m$. Из равенств (6), (7) при $h\to 0$ следует представление функционала

$$\left\langle l_{\Omega}(x),\varphi(x)\right\rangle=\int\limits_{E_n}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}D^{\alpha}\varphi_0(x)D^{\alpha}\varphi(x)dx. \qquad (8)$$

Равенство (5) доказано.

Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\left|\left\langle l_{\Omega}(x),\varphi(x)\right\rangle\right| = \left|\int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^{\alpha}\varphi_0(x) D^{\alpha}\varphi(x)dx\right| \le \left\|\varphi_0(x)\right\|_{L_{p'}^m} \left\|\varphi(x)\right\|_{L_p^m}. \quad (9)$$

Из (9) следует его ограниченность. Линейность функционала $l_{\Omega}(x)$ очевидна. Следовательно, $l_{\Omega}(x)$ — ограниченный линейный функционал.

Лемма доказана.

Из равенства (7) имеем

$$\int\limits_{E_n}(-1)^m \Delta^m \varphi_0(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{E_n} l_{\Omega}(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi(x)\in L_p^m.$$

то есть $\Delta^m \varphi_0(x) = (-1)^m l_{\Omega}(x)$, решение которого записывается в виде свертки правой части с фундаментальным решением $G(x)$ полигармонического уравнения $\Delta^m G(x) = (-1)^m \delta(x)$ [6].

Теорема. *Пусть* $pm > n$, $p(m-|S|) > n$, $|S| \le \rho$ *и* $l_{\Omega}(x)$ *— произвольный финитный функционал общего вида из* L_p^m *и* $\left\langle l_{\Omega}(x), x^{\alpha}\right\rangle = 0$ *при* $|\alpha| < m$, *тогда существует единственная функция* $u(x) = G(x) * l_{\Omega}(x) + P_{m-1}(x) \in L_{p'}^m$, *определенная с точностью до произвольного многочлена* $P_{m-1}(x)$ *степени* (m-1) *и удовлетворяющая уравнению*

$$\Delta^m u(x) = (-1)^m l_{\Omega}(x) \qquad (10)$$

и функционал общего вида имеет следующее представление

$$\left\langle l_{\Omega}(x),\varphi(x)\right\rangle = \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^{\alpha} G(x) * l_{\Omega}(x) D^{\alpha}\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi(x)\in L_p^m \quad (11)$$

$$\text{и } \left\|l_{\Omega}(x)\right\|_{L_p^{m*}} \le \left[\int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left|D^{\alpha} G(x) * l_{\Omega}(x)\right|^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Доказательство. Производная порядка $m+|S|$ от *G(x)* удовлетворяет следующим оценкам [1, стр. 678].

$$\left|D^{m+|S|}G(x)\right| \le C\begin{cases} |x|^{2m-n-(m+|S|)}, & \text{если } |x|\le R,\ n-\text{нечетное} \\ & \text{или } n-\text{четное и } 2m-n-(m+|S|)<0, \\ |x|^{2m-n-(m+|S|)}\ln|x|, & \text{если } |x|\le R,\ n-\text{четное} \\ & \text{и } 2m-n-(m+|S|)>0, \\ \ln|x|, & \text{если } |x|\le R,\ n-\text{четное} \\ & \text{и } 2m-n-(m+|S|)=0. \end{cases} \qquad (12)$$

Покажем, что $u(x)\in L_{p'}^m$. Для этого следующий интеграл разобьем на два интеграла

$$\int_{E_n}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\left|D^{\alpha}G(x)*l_{\Omega}(x)\right|^{p'}dx=\int_{|x|\le R}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\left|D^{\alpha}G(x)*l_{\Omega}(x)\right|^{p'}dx+$$

$$+\int_{|x|>R}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\left|D^{\alpha}G(x)*l_{\Omega}(x)\right|^{p'}dx=I_1+I_2. \qquad (13)$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1\le\left\|l_{\Omega}(x)\right\|^{p'}\int_{|x|\le R}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\left|D^{\alpha+|S|}G(x)\right|^{p'}dx\le$$

$$\le C\sup_{|\alpha|=m,\ |S|\le\rho}\int_{|x|\le R}\left|D^{\alpha+|S|}G(x)\right|^{p'}dx\le C_1\int_{|x|\le R}\left|D^{m+|S|}G(x)\right|^{p'}dx. \qquad (14)$$

При n – нечетном или n – четном и $2m-n-(m+|S|)<0$, из оценок (12) получим

$$I_1\le C_1\int_{|x|\le R}|x|^{(2m-n-(m+S))p'}dx=C_1\int_{|x|\le R}|x|^{\frac{(m-n-S)p}{p-1}}dx. \qquad (15)$$

Переходя к полярным координатам в (15) и учитывая условия вложения $p(m-S)>n$, имеем

$$I_1 \le C_1 \int_0^R \int_{|\theta|=1} r^{\frac{(m-n-S)p}{p-1}} r^{n-1} dr d\theta \le C_1 \int_0^R r^{\frac{p(m-S)-n}{p-1}-1} dr =$$
$$= C_1 r^{\frac{p(m-S)-n}{p-1}} \Bigg|_0^R < \infty. \tag{16}$$

Пусть n – четное и $2m-n-(m+|S|)>0$. Тогда при $|\alpha|=m$, в силу оценок (12), имеем $\left|D^{m+|S|}G(x)\right| \le C_1 |x|^{2m-n-(m+|S|)} \left|\ln|x|\right|$. Далее, учитывая что $\max\limits_{0\le x\le R} \left||x|^{m-n-|S|} \ln|x|\right| = \frac{1}{(m-n-|S|)e}$, получим

$$I_1 \le C_1 \int_{|x|\le R} \left|\frac{1}{(m-n-|S|)e}\right|^{p'} dx \le C_1 \int_0^R r^{n-1} dr = C_1 r^n \Big|_0^R < \infty. \tag{17}$$

Если $2m-n-(m+|S|)=0$ и n – четное, то

$$I_1 \le C_1 \int_{|x|\le R} \left|\ln|x|\right|^{p'} dx \le C_1 \int_0^R \left|\ln r\right|^{p'} r^{n-1} dr =$$
$$= C_1 \int_0^R \left| r^{\frac{n-1}{p'}} \ln r \right|^{p'} dr < \infty. \tag{18}$$

Из оценок (16)–(18) следует, что $I_1 < \infty$.

Теперь рассмотрим второй интеграл I_2. Поведение функции

$$D^{m+|S|}G(x) * l_\Omega(x) = \int D^{m+|S|} G(x-y) l_\Omega(y) dy$$

удобно исследовать, используя разложение производных от $D^{m+|S|}G(x-y)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля по степеням y с остаточным членом при $x \ne y$ и $|x|>R$

$$D^{m+|S|}G(x-y)=\sum_{|\alpha|\le m} D^{m+|S|+\alpha}G(x)\frac{(-y)^{\alpha}}{\alpha!}+R(y,x). \quad (19)$$

Тогда имеем

$$D^{m+|S|}G(x)*l_{\Omega}(x)=\int D^{m+|S|}G(x-y)l_{\Omega}(y)dy=$$
$$=\int\sum_{|\alpha|\le m} D^{m+|S|+\alpha}G(x)\frac{(-y)^{\alpha}}{\alpha!}l_{\Omega}(y)dy+\int R(y,x)l_{\Omega}(y)dy. \quad (20)$$

В первом слагаемом, стоящем справа в (20), все интегралы обращаются в нуль в силу $\left\langle l_{\Omega}(x),x^{\alpha}\right\rangle=0$ при $|\alpha|<m$. Оценим остаточный член. Остаточный член разложения удовлетворяет оценке [1, стр. 528]

$$|R(y,x)|\le\frac{C}{|x-y|^{n+|S|}}, \quad (21)$$

$$I_2\le C\int_{|x|>R}\left|\frac{1}{|x|^{n+|S|}}\right|^{p'}dx=C\int_R^{\infty}\left(\frac{r^{n-1}}{r^{\frac{p(n+|S|)}{p-1}}}\right)dr=$$
$$=C\int_R^{\infty}\left(\frac{1}{r^{\frac{p|S|+n}{p-1}+1}}\right)dr=C\left(\frac{1}{r^{\frac{p|S|+n}{p-1}}}\right)\Bigg|_R^{\infty}<\infty. \quad (22)$$

Таким образом, интеграл

$$\int_{E_n}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\left|D^{\alpha}G(x)*l_{\Omega}(x)\right|^{p'}dx<\infty.$$

Следовательно, $u(x)=G(x)*l_{\Omega}(x)+P_{m-1}(x)\in L_{p'}^{m}$.

Легко проверить, что $G(x)*l_{\Omega}(x)$ является решением уравнения (10) В силу теоремы о плотности множества финитных функций в пространстве $L_p^m(E_n)$, все решения однородного уравнения $\Delta^m u = 0$ являются многочленами из P_{m-1} [1].

Общее решение уравнения (10) в пространстве $L_p^m(E_n)$ имеет вид

$$u(x) = G(x) * l_\Omega(x) + P_{m-1}(x).$$

Доказательство теоремы следует из общего решения уравнения (10) и неравенств (16), (17), (18) и (22) и доказательства леммы.

Таким образом, общий вид функционала погрешности $l_\Omega(x)$ имеет вид

$$\langle l_\Omega(x), \varphi(x)\rangle = \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha G(x) * l_\Omega(x) D^\alpha \varphi(x) dx \qquad \forall \varphi(x) \in L_p^m.$$

Дважды применив неравенство Гельдера, получим

$$\left|\langle l_\Omega(x), \varphi(x)\rangle\right| = \left| \int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha G(x) * l_\Omega(x) D^\alpha \varphi(x) dx \right| \le$$

$$\le \int\limits_{E_n} \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| D^\alpha G(x) * l_\Omega(x) \right|^{p'} \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| D^\alpha \varphi(x) \right|^{p} \right]^{\frac{1}{p}} dx \le$$

$$\le \left[\int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| D^\alpha G(x) * l_\Omega(x) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| D^\alpha \varphi(x) \right|^{p} dx \right]^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left[\int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| D^\alpha G(x) * l_\Omega(x) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \|\varphi(x)\|_{L_p^m}.$$

Следовательно,

$$\|l_\Omega(x)\|_{L_p^{m*}} \le \left[\int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| D^\alpha G(x) * l_\Omega(x) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}}. \quad (23)$$

Теорема доказана.

Заключение

Используя функционально-аналитический поход, получили общий вид финитных функционалов погрешности кубатурных формул общего вида в пространстве Соболева $L_p^m(E_n)$. Полученное неравенство (23) используется при оценке сверху нормы функционала погрешности.

Литература

1. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.

2. Половинкин В. И. Асимптотическая оптимальность последовательностей формул с регулярным пограничным слоем при нечетном m // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 328–335.

3. Половинкин В. И., Дидур Л. И. Асимптотически оптимальные последовательности эрмитовых кубатурных формул // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 3. С. 663–669.

4. Цыренжапов Н. Б., Урбаханов А. В. Построение кубатурных формул общего вида с узлами на решетке для фундаментального куба на плоскости // Кубатурные формулы и их приложения: Докл. VII семинара-совещ. / отв. ред. М. В. Носков. Красноярск, 2003. С. 184–187.

5. Цыренжапов Н. Б. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида с пограничным слоем и узлами на решетке в пространстве Соболева $L_p^m\left(E_n\right)$: дис… канд. физ.-мат. наук (01.01.07) / Вост.-Сиб. технологич. ун-т. Улан-Удэ, 2004. 102 с.

6. Шойнжуров Ц. Б. Кубатурные формулы в пространстве С. Л. Соболева W_p^m. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2002. 222 с.

GENERAL FORM OF ERROR FINITE FUNCTIONALS OF HERMITIAN CUBATURE FORMULAS IN SOBOLEV SPACE $L_p^m\left(E_n\right)$

Nima B. Tsyrenzhapov
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Buryat State University, 24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: nimac@mail.ru

Aleksandr V. Urbakhanov
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
East-Siberian State University of Technologies and Management
40v Kluchevskaya St., Ulan-Ude 670033, Russia
E-mail: urbahanov@mail.ru

The article deals with cubature formulas of general type which include values of function and its derivatives, and gives a general representation of the finite functionals of these formulas.

Keywords: cubature formulas; error functional; Sobolev space; approximate integration; generalized function; Taylor formula; harmonic operator; numerical integration.