МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

УДК 621.372.823:537.622.6
doi: 10.18101/2304-5728-2017-4-42-47

УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГИРОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДАХ ПРИ КАСАТЕЛЬНОМ НАМАГНИЧИВАНИИ

© Итигилов Гарма Борисович
кандидат технических наук, доцент,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
E-mail: gablz@mail.ru

© Ширапов Дашадондок Шагдарович
доктор физико-математических наук, профессор,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В
E-mail: shir@esstu.ru

© Анахин Владимир Дмитриевич
доктор технических наук, профессор
Бурятский государственный университет
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: anakhin@mail.ru

Получены обобщенные уравнения Гельмгольца гибридных волн в регулярных гиротропных волноводах с ортогональными формами поперечного сечения при касательном намагничивании. Полученные уравнения инварианты относительно преобразования координат. Это позволяет легко получить уравнения Гельмгольца для конкретных типов волноводов с ортогональными формами поперечного сечения: прямоугольным, круглым, эллиптическим. Представлен переход к гиротропному эллиптическому волноводу при касательном (эллиптическом) намагничивании.

Ключевые слова: касательное намагничивание; тензор магнитной проницаемости феррита; уравнения Гельмгольца; коэффициенты Ламэ; символы Кристоффеля; эллиптический гиротропный волновод.

Введение

В технике сверхвысоких частот получили широкое распространение магнитные материалы, называемые ферритами. Это обстоятельство привело к развитию электродинамики гиротропных и анизотропных сред, которая является научной основой построения весьма разнообразных устройств в самых различных областях техники высоких частот [1]. При этом в основном рассматриваются случаи прямоугольного и круглого волноводов с продольно-намагниченным ферритом, на основе которых разрабатываются ферритовые устройства фарадеевского типа [2, 3, 4].

В технике сверхвысоких частот также используются гиротропные волноводы с поперечно-намагниченным ферритом [2, 5]. В этих и в других работах мало или совсем не рассматриваются гиротропные эллиптические волноводы [см., например, 6], которые имеют определенные преимущества перед круглыми [7].

Целью настоящей работы является получение уравнений Гельмгольца НЕ и ЕН волн гиротропного волновода с ортогональной формой поперечного сечения при касательном намагничивании и на их основе переход к гиротропному эллиптическому волноводу при касательном (эллиптическом) намагничивании.

1. Уравнения Гельмгольца для гибридных волн типа НЕ

Ранее в работе [8] было получено общее выражение, позволяющие вывести уравнения Гельмгольца НЕ-волны для гиротропного волновода с ортогональной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании:

$$\begin{gathered}\Delta_{11}H_Z+\Delta_{22}H_Z+j\gamma\left(\delta_1H_1+\delta_2H_2\right)-j\omega^2\varepsilon lH_1-j\omega^2\varepsilon mH_2+\\+\omega^2\varepsilon\mu_{33}H_Z=0,\end{gathered}\qquad(1)$$

где $\Delta_{11}=\delta_1\nabla_1=\dfrac{1}{h_1^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial q_1}+\Gamma_{21}^2-\Gamma_{11}^1\right)\dfrac{\partial}{\partial q_1}$; $\quad\delta_1=\dfrac{1}{h_1}\left(\dfrac{\partial}{\partial q_1}+\Gamma_{21}^2\right)$;

$$\Delta_{22}=\delta_2\nabla_2=\frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}+\Gamma_{12}^1-\Gamma_{22}^2\right)\frac{\partial}{\partial q_2};\quad\delta_2=\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}+\Gamma_{12}^1\right);\quad\nabla_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i};$$

$H_3=H_Z$ — продольная, H_1 и H_2 — поперечные компоненты магнитного поля; j — мнимая единица; γ — постоянная распространения; h_1, h_2 — коэффициенты Ламэ; q_1, q_2 — обобщенные поперечные координаты; Γ_{12}^1, Γ_{21}^2 — символы Кристоффеля; ω — циклическая частота; ε — диэлектрическая проницаемость феррита, l, m, μ_{33} — компоненты тензора магнитной проницаемости феррита.

Тензор магнитной проницаемости феррита при произвольном намагничивании имеет вид [9]:

$$\left\|\mu\right\|=\begin{bmatrix}\mu_{11} & jk & jl\\ -jk & \mu_{22} & jm\\ -jl & -jm & \mu_{33}\end{bmatrix},\qquad(2)$$

где $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, k, l, m$ — компоненты тензора.

Существует два случая поперечного намагничивания, когда постоянное внешнее намагничивающее поле H_0 параллельно одному из двух поперечных координатных линий. При касательном намагничивании компоненты тензора магнитной проницаемости феррита примут вид [9]:

$$\mu_{22} = \mu_{||}\,;\ \mu_{11} = \mu_{33} = \mu\,;\ k = m = 0\,;\ l \neq 0\,. \tag{3}$$

С учетом (3) формула (1) для касательного намагничивания примет вид:

$$\Delta_{11} H_Z + \Delta_{22} H_Z + j\gamma(\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - j\omega^2 \varepsilon l H_1 + \omega^2 \varepsilon \mu H_Z = 0\,. \tag{4}$$

Поперечные компоненты электромагнитных волн в гиротропных волноводах с ортогональной формой поперечного сечения при касательном намагничивании имеет вид [4]:

$$\begin{cases} E_1 = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\nabla_1 E_z + \dfrac{\omega\mu_{||}}{\gamma}\nabla_2 H_z\right\}, \\ E_2 = -\dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\nabla_2 E_z - \left(\dfrac{\omega\mu}{\gamma}\nabla_1 + \omega l\right) H_z\right\}, \\ H_1 = \dfrac{j\gamma}{a^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma}\nabla_2 E_z - \left(\nabla_1 + \dfrac{\omega^2 \varepsilon l}{\gamma}\right) H_z\right\}, \\ H_2 = -\dfrac{j\gamma}{b^2}\left\{\dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma}\nabla_1 E_z + \nabla_2 H_z\right\}, \end{cases} \tag{5}$$

где E_1, E_2 — поперечные компоненты электрического поля; $E_3 = E_Z$ — продольная компонента электрического поля; $a^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - \gamma^2$; $b^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_{||} - \gamma^2$.

Подставив выражения для поперечных компонент H_1 и H_2 из системы (5) в формулу (4), получим уравнение Гельмгольца гибридных НЕ-волн для гиротропных волноводов с ортогональной формой поперечного сечения при касательном намагничивании:

$$\begin{aligned} &\Delta_{11} H_Z + \frac{\mu_{||}}{\mu}\frac{a^2}{b^2}\Delta_{22} H_Z + \left(c^2 + \gamma \frac{l}{\mu}\frac{\Gamma_{21}^2}{h_1}\right) H_Z = \\ &= \frac{\gamma}{\omega\mu}\frac{b^2 - a^2}{a^2}\Delta_{12} E_Z + \omega\varepsilon \frac{l}{\mu}\nabla_2 E_Z\,, \end{aligned} \tag{6}$$

где $c^2 = \omega^2 \varepsilon \dfrac{\mu^2 - l^2}{\mu} - \gamma^2$; $\Delta_{12} = \delta_1 \nabla_2 = \dfrac{1}{h_1 h_2}\dfrac{\partial}{\partial q_1}\dfrac{\partial}{\partial q_2}$.

Коэффициенты Ламэ h_i, символы Кристоффеля Γ_{12}^1 и Γ_{21}^2, дифференциальные операторы I-го δ_i, ∇_i и II-го порядков Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{12} для эллиптических волноводов имеют вид [8]:

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = ed; \quad h_3 = h_Z = 1; \nabla_1 = \dfrac{1}{ed}\dfrac{\partial}{\partial\xi}; \nabla_2 = \dfrac{1}{ed}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}; \\ \delta_1 = \dfrac{1}{ed}\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi} + \dfrac{Sh2\xi}{2d^2}\right); \delta_2 = \dfrac{1}{ed}\left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{sin\,2\varphi}{2d^2}\right); \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \dfrac{Sin2\varphi}{2d^2}; \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{11}^1 = \dfrac{Sh2\xi}{2d^2}; \\ \Delta_{11} = \dfrac{1}{e^2d^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}; \Delta_{22} = \dfrac{1}{e^2d^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}; \Delta_{12} = \dfrac{1}{e^2d^2}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}, \end{cases} \tag{7}$$

где $q_1 = \xi$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = Z$ — координатные линии эллиптической системы координат; e — фокус эллипса; $d^2 = ch^2\xi - cos^2\varphi$.

Подставив выражение (7) в формулу (6) получим уравнение Гельмгольца НЕ-волн гиротропного эллиптического волновода при эллиптическом намагничивании:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 H_Z}{\partial\xi^2} + \frac{\mu_{||}}{\mu}\frac{b^2}{a^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial\varphi^2} + e^2d^2\left(c^2 + \gamma\frac{l}{\mu}\frac{sh2\xi}{2ed^3}\right)H_Z = \\ = \frac{\gamma}{w\mu}\frac{b^2 - a^2}{a^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial\xi\partial\varphi} + w\varepsilon\frac{l}{\mu}ed\frac{\partial E_Z}{\partial\varphi}, \end{gathered} \tag{8}$$

2. Уравнения Гельмгольца для гибридных волн типа ЕН

В работе [8] были получены общие выражения, позволяющие вывести уравнения Гельмгольца ЕН-волны для гиротропного волновода с ортогональной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании:

$$\begin{gathered} \mu_{11}\Delta_{11}E_Z + \mu_{22}\Delta_{22}E_Z + j\gamma(\mu_{11}\delta_1E_1 + \mu_{22}\delta_2E_2) + \omega(\mu_{11}m\delta_1 - \mu_{22}l\delta_2)H_Z + \\ + \gamma k\omega(-lH_1 - mH_2 - j\mu_{33}H_Z) - \omega^2\varepsilon(k^2 - \mu_{11}\mu_{22})E_Z + j\omega(lk\delta_1 + mk\delta_2).H_Z = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Для случая касательного намагничивания формула (9) с учетом условий (3) примет вид:

$$\mu\Delta_{11}E_Z + \mu_{||}\Delta_{22}E_Z + j\gamma(\mu\delta_1E_1 + \mu_{||}\delta_2E_2) - \omega\mu_{||}l\delta_2H_Z + \omega^2\varepsilon\mu_{||}\mu E_Z = 0. \tag{10}$$

Подставив выражения для поперечных компонент E_1 и E_2 из системы (5) в формулу (10) получим уравнение Гельмгольца гибридных ЕН-волн для гиротропных волноводов с ортогональной формой поперечного сечения при касательном намагничивании:

$$\frac{a^2}{b^2}\Delta_{11}E_Z + \Delta_{22}E_Z + a^2E_Z = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\frac{b^2 - a^2}{a^2}\Delta_{12}H_Z - \omega l\delta_2H_Z. \tag{11}$$

Подставив выражение (7) в формулу (11) получим уравнение Гельмгольца ЕН-волн гиротропного эллиптического волновода при эллиптическом намагничивании:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + a^2 e^2 d^2 E_Z = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\frac{b^2 - a^2}{a^2}\frac{\partial^2 H_Z}{\partial \xi \partial \varphi} - \\ - \omega led\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{sin\, 2\varphi}{2d^2}\right)H_Z. \end{cases} \tag{12}$$

Заключение

Получены уравнения Гельмгольца гибридных волн типа НЕ (6) и ЕН (11) обобщенного гиротропного волновода с ортогональной формой поперечного сечения при касательном намагничивании.

На основе уравнений (6) и (11) получены новые уравнения Гельмгольца гибридных волн НЕ (8) и ЕН (12) для эллиптического гиротропного волновода при эллиптическом намагничивании.

Последующее решение краевых задач для уравнений (8) и (12) позволят исследовать физику распространения электромагнитных волн в таких устройствах СВЧ как вентиля и управляемые фазовращатели, построенные на основе поперечно-намагниченных гиротропных эллиптических волноводов и учесть особенности распространения электромагнитных волн в них на практике.

Литература

1. Сул Г., Уокер Л. Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах: пер. с англ. М. 1955. 192 с.
2. Микаэлян А. Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. Л.: Госэнергоиздат, 1963. 664 с.
3. Агалаков А. Н., Раевский С. Б., Титаренко А. А. О решении краевых задач для волноводов с анизотропным заполнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 7. С. 1113–1123.
4. Особенности построения фазированных антенных решеток миллиметрового диапазона волн для РЛС зенитно-артиллерийского комплекса малой дальности / Шевцов О. Ю. [и др.] // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. 2010. № 65. С. 61–69.
5. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994. 464 с.
6. Гончаренко А. М., Карпенко В. А. Основы теории оптических волноводов. Изд. 2-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
7. Ефимов И. Е., Шермина Г. А. Волноводные линии передачи. М.: Связь, 1979. 232 с.

8. Итигилов Г. Б. Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в ограниченных гиротропных областях произвольной формы: дис… канд. техн. наук / Бурятский государственный университет. Улан-Удэ, 2014. 146 с.

9. Неганов В. А., Нефедов Е. И., Яровой Г. П. Современные методы проектирования линий передач и резонаторов сверх- и крайневысоких частот. М.: Педагогика-Пресс, 1998. 328 с.:ил.

HELMHOLTZ EQUATIONS OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN GYROTROPIC WAVE CONDUCTOR DURING TANGENT MAGNETIZATION

Garma B. Itigilov
Cand. Sci. (Engineering), A/Prof.,
East-Siberian State University of Technology and Management,
40v Klyuchevskaya St., Ulan-Ude 670013, Russia
E-mail: gablz@mail.ru

Dashadondok Sh. Shirapov
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
East Siberian State University of Technology and Management,
40v Klyuchevskaya St., Ulan-Ude 670013, Russia
E-mail: shir@esstu.ru

Vladimir D. Anakhin
Dr. Sci. (Engineering), Prof.,
Buryat State University, 24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: anakhin@mail.ru

The generalized Helmholtz equations of hybrid waves in regular gyrotropic wave conductors with orthogonal forms of cross section are received during tangent magnetization. The received equations are invariant relatively to transformation of coordinates. It allows us to receive easily Helmholtz equations for concrete types of wave conductors with orthogonal forms of cross section: rectangular, round, elliptic. Transition to a gyrotropic elliptic wave conductor during tangent (elliptic) magnetization is presented.

Keywords: tangent magnetization; tensor of ferrite magnetic permeability; the Helmholtz equation; Lame coefficients; Christoffel symbols; elliptic gyrotropic wave conductor.