УДК 519. 2: 372.851
doi: 10.18101/1994-0866-2017-7-196-204

СУБЪЕКТИВНЫЙ И ОБЪЕКТИВНЫЙ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

© Зеппова Наталья Николаевна
кандидат педагогических наук, доцент,
Иркутский национальный исследовательский технический университет
Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83
E-mail: zepnova.nat@mail.ru

© Кузьмин Олег Викторович
доктор физико-математических наук, профессор,
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1
E-mail: quzminov@mail.ru

В статье рассмотрены основные типы и проведен анализ различных ошибок, совершаемых студентами при решении задач разделов теории вероятностей, связанных с понятием случайного события, а также таких разделов дискретной математики, как комбинаторика, теория множеств, математическая логика. Проведено сравнение субъективного и объективного подхода к решению задач. Приведены подробные решения задач, вызывающих затруднения у студентов. Даны методические рекомендации преподавателям по совершенствованию учебного процесса. Статья может быть полезна преподавателям математики и специалистам, которым приходится иметь дело с применением дискретных и стохастических методов решения задач, а также студентам, изучающим указанные разделы теории вероятностей и дискретной математики.
Ключевые слова: субъективность; объективность; случайные события; вероятность; комбинаторика; логика; теория множеств; решение задач; заблуждения; методология.

Решение задач дискретной математики и теории вероятностей нередко бывает сопряжено для студентов и школьников с большими трудностями. Зачастую это обусловлено, на наш взгляд, противоречиями между субъективным восприятием учащихся и объективными методами их решения. Рассмотрим вопрос «Что понимается под субъективным и объективным в философии, психологии и методологии?».

1. Философский подход к вопросам субъективности и объективности восприятия

В философии субъективное — то, что характеризует субъект или же производно от субъекта и его деятельности. Исторически субъективное трактовалось в классической философии как особый внутренний мир сознания, не подвергающийся сомнению самим субъектом. В таком качестве субъективное было противопоставлено объективному миру физических вещей и событий как существующему вне субъективного, что не является абсолютно достоверным.

Противопоставление субъективного и объективного породило ряд проблем в классической философии. В современной философии и психологии принята точка зрения, что субъективное, переживаемое нами в качестве чисто «внутреннего» и сугубо личного, не является изначально данным и не может рассматриваться как особый мир, наполненный переживаниями, представлениями, образами памяти и т. д., а является способом ориентации субъекта во внешнем мире. Любые действия, будучи порождены субъектом и в этом смысле будучи субъективными, в то же время не принадлежат к субъективному миру в классическом его понимании, а относятся к сфере интерсубъективного, которая выходит за рамки противоположности субъективного и объективного. Поэтому субъективное и объективное являются двумя полюсами восприятия.

К субъективному относятся также заблуждения мышления, которые возникают обычно тогда, «когда мыслительная деятельность неадекватна изучаемому объекту. В то же время субъект может точно описывать то, что ему непосредственно дано, и тем не менее заблуждаться» [1].

В методологии науки субъективное знание — это система представлений субъекта о непосредственно знаемом, т. е. получаемом в результате непосредственного наблюдения за внешним миром или в процессе размышления. Объективное знание невозможно вне или безотносительно к субъективному. В теории познания Д. Юма была заложена двойственность в отношении к процессу и результатам научного знания. С одной стороны, все, что потом представлено в научном знании, первоначально представлено как знание субъективное. С другой стороны, законы индукции позволяют человеку выстроить обобщение, то есть в качестве логических законов они позволяют человеку раскрывать объективное знание.

При этом возникают две проблемы. Первая — проблема объективного наблюдателя, которая воспринимается как проблема искажения знания в процессе познания его субъектом, то есть зависимость научного знания от субъективных представлений. Вторая — проблема истинности научного знания. И здесь в методологии обсуждению подлежат разные аспекты проблемы истинности. С одной стороны, это проблема существования законов (в которых и представлено объективное знание) именно как субъективно формулируемых, т. е. не существующих вне зависимости от познающего субъекта. С другой стороны, это проблема включенности критериев объективного уже в процесс субъективного, или психологического, познания [2].

2. Причины возникновения противоречий при решении задач

По мнению Карла Пирсона, в математике нет другой области, в которой столь же легко допустить ошибку, как теория вероятностей. Причиной этого, скорее всего, является кажущаяся «очевидность», «логичность» некоторых рассуждений, опирающихся на так называемый «здравый смысл», а не на математический подход. Только очень самонадеянный человек решает, например, дифференциальные уравнения, полагаясь не на теорию и строгие правила, а на догадки. При решении же задач теории вероятностей, а также некоторых типов логических и комбинаторных задач у аудитории, напротив, сразу возникает целый ряд предположений и допущений, якобы ведущих к решению. Но эту активность, пожалуй, следует стимулировать, уж во всяком случае нельзя подавлять. С методологической точки зрения иная ошибка ценнее, чем безошибочные, но рутинные действия. Однако необходим анализ заблуждений, которые являются вполне типичными.

В простейших задачах теории вероятностей элементарные исходы пересчитываются буквально «на пальцах», но в этой кажущейся простоте часто и кроется опасность ошибки [3; 4]. Иногда для подсчета количества элементарных исходов лучше применить формулы комбинаторики. Но здесь основная трудность (и, следовательно, источник ошибок) обычно состоит в выборе вида соединений (перестановки, сочетания, размещения). Во многих случаях ввести множество элементарных исходов можно по-разному, и этому будет соответствовать выбор разных видов соединений [5].

Итак, целями данной работы являются анализ и построение типологии методологических ошибок и заблуждений, связанных с изучением курсов теории вероятностей и дискретной математики. Авторы опирались на личный опыт в преподавании теории вероятностей и дискретной математики студентам разных специальностей — физико-математических, технических, экономических, на ряд известных работ, в которых «вероятность рассматривается через призму парадоксов, контрпримеров, ломки стереотипов, а также с позиций непосредственного практического смысла» [6].

3. Сравнение различных подходов при решении задач

Рассмотрим некоторые примеры противоречия субъективных восприятий учащихся и объективных методов при решении задач дискретной математики и теории вероятностей. Начнем с вероятностных задач.

Задача 1: В урне находятся 4 белых и 6 черных шаров. Сколько существует способов вынуть из урны 4 шара так, чтобы среди них было не меньше двух белых?

Решение: Обычно подобные задачи решают, разбивая их на элементарные ситуации. Комбинация «не менее двух белых шаров из четырех вынутых» означает: «два белых и два черных шара», или «три белых и один черный шар», или «четыре белых и ноль черных шаров». При этом порядок расположения шаров в выборке не важен. Тогда решение можно представить в виде:

$$C_4^2 * C_6^2 + C_4^3 * C_6^1 + C_4^4 * C_6^0 = \frac{4!}{2!*2!} * \frac{6!}{4!*2!} + \frac{4!}{3!*1!} * \frac{6!}{5!*1!} + \frac{4!}{0!*4!} * \frac{6!}{6!*0!} = 115 .$$

Если же рассмотреть порядок выемки шаров иначе: сначала достать два белых шара (и этим обеспечить необходимый минимум белых шаров), а затем к ним присоединить еще два шара из оставшихся восьми (причем в любых комбинациях — и это не противоречит условию задачи), то решение примет вид:

$C_4^2 * C_8^2 = \frac{4!}{2!*2!} * \frac{8!}{6!*2!} = 168$. Получили разное количество способов, хотя, казалось бы, в обоих случаях рассуждения были верные.

Дело в том, что учащиеся изначально по-разному поняли условие задачи. В первом случае подразумевалось, что выемка шаров производится одновременно, то есть из урны достают четыре шара сразу. А во втором — последовательно: сначала два белых и затем из оставшихся — два любых. При этом вторая ситуация дает лишние комбинации по сравнению с первой: например, в первом случае есть только один способ вынуть четыре белых шара, а во втором — целых шесть, поскольку количество способов вынуть сначала два белых шара из четырех вычисляется как $C_4^2 = 6$, и это количество умножается на количество способов вынуть два белых шара из оставшихся двух, то есть на один. Таким же образом возникают лишние комбинации с другими наборами шаров. Эта ситуация аналогична следующей задаче.

Задача 1а: В урне находятся 4 шара. Сколько существует способов вынуть из урны комбинации по 2 шара? Если шары вынимаются одновременно, то таких способов $C_4^2 = 6$, а если последовательно — сначала один, затем еще один, то способов уже $C_4^1 * C_3^1 = 4*3 = 12$.

Вызывает интерес решение задач с применением формул полной вероятности и Байеса.

Задача 2: В первой урне лежат 6 белых и 4 черных шара, во второй — 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули один шар. Какова вероятность того, что этот шар — белый?

Решение: Очевидно, мы имеем дело с выдвижением различных гипотез о возможных вариантах выбора шара из второй урны (и последующего перекладывания его в первую). Такие задачи решаются с применением формулы полной вероятности.

Пусть требуется определить вероятность события *A*, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, несовместных и образующих полную группу (эти события называют гипотезами). Вероятность события *A* вычисляется как сумма произведения вероятности каждой из гипотез на условную вероятность события *A* при этой гипотезе:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) * P(A / H_i), \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1 .$$

Рассматривается событие А: «Из первой урны вынут белый шар» при различных гипотезах относительно состава шаров в урне после перекладывания шара. Пусть гипотеза H_1: «Из второй урны вынут белый шар и переложен в первую урну», а гипотеза H_2: «Из второй урны вынут черный шар и переложен в первую урну». Тогда вероятность первой гипотезы $P(H_1) = 3/10$, а вероятность второй гипотезы $P(H_2) = 7/10$.

При допущенных гипотезах мы получаем разные составы шаров в первой урне после перекладывания шара из второй урны: принимая гипотезу H_1, в первой урне стало 7 белых и 4 черных шара, а при гипотезе H_2 — 6 белых и 5 черных шаров. Тогда вероятность выемки из первой урны белого шара при первой гипотезе $P(A / H_1) = 7/11$, а вероятность выемки из первой урны белого шара при второй гипотезе $P(A / H_2) = 6/11$. Значит, вероятность выемки белого шара из первой урны после перекладывания равна

$$P(A) = P(H_1) * P(A / H_1) + P(H_2) * P(A / H_2) = \frac{3}{10} * \frac{7}{11} + \frac{7}{10} * \frac{6}{11} = \frac{63}{110} .$$

Рассмотрим теперь другую задачу в условиях задачи 2.

Задача 3: После перекладывания из первой урны вынут белый шар. Какова вероятность того, что ранее он находился во второй урне?

Очевидно, речь идет о нахождении вероятности гипотезы «aposteriori», то есть после наступления события. При решении таких задач применяются формулы Байеса: $P(H_i / A) = \dfrac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)}$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i / A) = 1$.

Однако те гипотезы, которые мы выдвигали при решении задачи 2, не позволяют решить задачу 3. Ведь мы предполагали, что при любой из гипотез задачи 2 шар перекладывался из второй урны и изменял состав шаров в первой урне. Но можно попробовать выдвинуть другие гипотезы. Например, разобьем все множество шаров в первой урне после перекладывания на две совокупности: в первую совокупность определим все шары, находившиеся в первой урне до перекладывания шара из второй урны (их 10), а во вторую совокупность отнесем шар, переложенный из второй урны.

Тогда гипотеза H_1: «Выбран шар из первой совокупности», а гипотеза H_2: «Выбран шар из второй совокупности». Вероятность первой гипотезы $P(H_1) = 10/11$, а вероятность второй гипотезы $P(H_2) = 1/11$. Вероятность выемки из первой урны белого шара при первой гипотезе стала $P(A / H_1) = 6/10$, а вероятность выемки из первой урны белого шара при второй гипотезе стала $P(A / H_2) = 3/10$. Значит, по формуле полной вероятности, вероятность выемки белого шара из первой урны после перекладывания равна:

$$P(A) = P(H_1) * P(A / H_1) + P(H_2) * P(A / H_2) = \frac{10}{11} * \frac{6}{10} + \frac{1}{11} * \frac{3}{10} = \frac{63}{110}.$$

Таким образом, полная вероятность события А при первом и при втором способе решения совпадает. Однако при втором способе выдвижения гипотез мы уже видим ту гипотезу, вероятность которой требуется определить в задаче 3: это гипотеза H_2: «Выбран шар из второй совокупности».

Теперь вероятность того, что вынутый белый шар ранее находился во второй урне, можно найти по формуле Байеса: $P(H_2 / A) = \dfrac{P(H_2) * P(A / H_2)}{P(A)} = \dfrac{1/11 * 3/10}{63/110} = \dfrac{1}{21}$.

Нужно отметить, что субъективно более понятным для студентов является первый способ выдвижения гипотез — чаще всего задачу 2 они решают именно этим способом. Второй способ воспринимается сложнее.

Рассмотрим класс задач, связанных с применением схемы Бернулли.

Задача 4: Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: выиграть одну партию из двух или две из четырех (возможность ничьей исключается)?

Решение: Субъективное впечатление, что вероятность этих событий должна быть одинакова и равна 1/2. Однако это не так.

Пусть событие А: «Выигрыш первого игрока в одной партии». Вероятность появления события А в каждой партии постоянна и равна 1/2 (так как игроки равносильные). Требуется найти вероятность того, что событие А произойдет в m случаях из n. Если для одних и тех же условий проводится *n* независимых опытов, в каждом из которых событие *A* появляется с вероятностью *p* и не появляется с вероятностью *q*=1-*p*, то вероятность появления события *A m* раз в *n* опытах находится по формуле Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

В данном случае *q*=1-*p*=1/2 и вероятность выигрыша одной партии из двух равна $P_2(1) = C_2^1 p^1 q^{2-1} = \dfrac{2!}{1!*1!} * (1/2)^1 * (1/2)^{2-1} = \dfrac{1}{2}$, а вероятность выиграть две партии из четырех равна соответственно $P_4(2) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = \dfrac{4!}{2!*2!} * (1/2)^2 * (1/2)^{4-2} = \dfrac{3}{8}$.

Объективный подход к решению задачи противоречит субъективному впечатлению.

Кроме того, часто студенты задают вопрос: если первый игрок выигрывает два партии из четырех, то верно ли, что противоположным этому событию является то, что остальные две партии он проигрывает? Казалось бы, это действительно так, и этим исчерпываются все возможные исходы данного опыта. То есть вероятность того, что игрок две партии проиграл и две партии выиграл, в сумме должна быть равна 1. Однако вероятность проигрыша двух партий из четырех в данных условиях также равна 3/8. Но 3/8 + 3/8 = 6/8 ≠ 1!

И снова субъективное восприятие условий задачи мешает правильному решению. Дело в том, что противоположным к событию «игрок выиграл две партии из четырех» является не «две остальные он проиграл», а «игрок выиграл **не** две партии из четырех». Иначе говоря, он выиграл или 0, или 1, или 3, или 4 партии из четырех. А вероятности последних событий опять находятся по формуле Бернулли и в сумме как раз и составляют 5/8.

Противоречие субъективного и объективного восприятия условий задачи встречается и при решении задач дискретной математики [7; 8].

Задача 5: В классе 42 ученика. Из них 16 занимаются легкой атлетикой,24 — футболом, 15 — шахматами; 11 человек одновременно занимаются легкой атлетикой и футболом, 8 — легкой атлетикой и шахматами, 12 — футболом и шахматами, а 6 участвуют во всех трех спортивных секциях. Остальные не занимаются спортом. Сколько человек не занимается спортом? Решение этой задачи удобно изобразить на диаграмме Эйлера — Венна (рис 1).

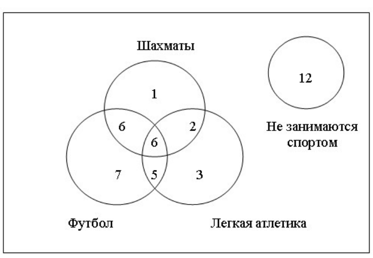

Рис. 1. Диаграмма Эйлера — Венна к задаче 5

Заполнение диаграммы лучше начинать «с середины»: поскольку известно, что всеми тремя видами спорта занимаются 6 человек, сразу заполняем область пересечения всех трех множеств. Поскольку шахматами и футболом занимаются 12 человек, из которых 6 уже учтены, то на область пересечения множеств «Шахматы» и «Футбол» без «Легкой атлетики» приходится: 12–6=6 человек. Аналогично рассуждая, заполняем области пересечения множеств «Шахматы» и «Легкая атлетика», «Футбол» и «Легкая атлетика». Затем определяем количество человек, занимающихся **только** шахматами: из 15 исключаем тех, кого уже посчитали (то есть тех, кто кроме шахмат занимается еще каким-либо другим видом спорта): 15–(6+6+2)=1. Аналогично заполняем оставшиеся области. После этого складываем все числа внутри диаграммы и вычитаем полученное число из общего количества учеников в классе. Таким образом, не занимаются спортом 12 человек.

При решении подобных задач возникает противоречие между субъективным восприятием и логическими правилами: студенты часто не понимают, зачем нужно из количества учеников, занимающихся, например, легкой атлетикой и футболом, вычитать количество тех учеников, которые занимаются всеми тремя видами спорта. Или зачем из количества тех, кто занимается легкой атлетикой, вычитать количество тех, кто занимается еще и футболом, и шахматами. Противоречие возникает из-за того, что студенты не делают различия между понятиями «занимается легкой атлетикой» и «занимается **только** легкой атлетикой».

Определенные противоречия между субъективным и объективным восприятием условий задач встречаются и при изучении алгебры логики. В частности, при изучении действий с булевыми переменными вызывают недоумение некоторые свойства дизъюнкции и конъюнкции [9; 10].

То, что конъюнкция дистрибутивна относительно дизъюнкции $A(B+C)=AB+AC$ не вызывает сомнения, поскольку соответствует нашим знаниям о правилах обычного умножения. А вот дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции $A+BC=(A+B)(A+C)$ вызывает некоторое противоречие с нашими представлениями о законах математики. Чтобы доказать данное свойство, переменным, входящим в формулу, придаются все возможные значения, которые они могут принимать, и вычисляются значения выражений, стоящих в левой и правой частях доказываемой формулы. Если на одних и тех же наборах значений переменных значения левой и правой частей совпадают, то формула верна. Докажем, например, свойство для случая двух переменных, сведя данные в табл. 1.

Таблица 1

Доказательство свойства дистрибутивности
дизъюнкции относительно конъюнкции

A	B	C	$A + BC$	$(A + B)(A + C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Значения четвертого и пятого столбцов совпадают, значит, свойство доказано.

Выводы. В данной работе мы не ставили цель — дать исчерпывающую классификацию ошибок, совершаемых студентами при решении задач теории вероятностей и дискретной математики, но хотели выделить и проанализировать те «тонкие места», которые, на наш взгляд, создают почву для непонимания или заблуждений. Полностью предотвратить ошибки и заблуждения обучаемых, связанные с задачами теории вероятностей и других разделов математики, невозможно, поскольку они, как правило, являются следствием определенных стереотипов мышления.

Однако можно существенно помочь студентам, если при изучении соответствующих разделов уделить больше внимания:

1) выстраиванию правильной схемы равновозможных элементарных исходов, что должно подсказать тому, кто решает задачу, надо ли в ней использовать элементы комбинаторики и какие именно;

2) уяснению связи и различия задач, требующих применения формул полной вероятности и Байеса с обязательной проверкой наличия полной группы несовместных событий (гипотез);

3) внимательному прочтению условия задачи, уяснению всех нюансов и подробностей, анализу и выстраиванию логической схемы решения задачи;

4) организации учебных дискуссий — значительно более эффективной формы обучения, чем традиционные занятия с доминирующей ролью преподавателя, где работа студентов сводится к расчетам по предлагаемым формулам [11].

Литература

1. Лекторский В. А. Эпистемология классическая и неклассическая. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 256 с.

2. Корнилова Т. В., Смирнов С. Д. Методологические основы психологии. СПб.: Питер, 2006. 320 с.

3. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2003. 240 с.

4. Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей. М.: Изд-во МЦНМО, 2012. 294 с.

5. Кузьмин О. В. Перечислительная комбинаторика: учеб. пособие. М.: Дрофа, 2005.112 с.

6. Гефан Г. Д., Кузьмин О. В. Типология ошибок и заблуждений, связанных с задачами курса теории вероятностей. Ч. 1. Случайные события // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2012. № 12(71). С. 187–193.

7. Зепнова Н. Н., Кузьмин О. В. Применение методов дискретной математики при решении логических задач // Омский научный вестник. 2014. № 2(130). С. 14–17.

8. Кузьмин О. В. Комбинаторные методы решения логических задач: учеб. пособие. М.: Дрофа, 2006. 187 с.

9. Зепнова Н. Н., Кузьмин О. В Особенности преподавания курса дискретной математики во втузе // Омский научный вестник. 2011. № 1(95). С. 160–163.

10. Зепнова Н.Н. Повышение уровня математического мышления студентов технического вуза средствами дискретной математики // Вестник ИрГТУ. 2015. № 4(99). С. 270–277.

11. Гефан Г. Д., Кузьмин О. В. Типология ошибок и заблуждений, связанных с задачами курса теории вероятностей. Ч. 2. Законы распределения случайных величин // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2013. № 2(73). С. 131–136.

SUBJECTIVE AND OBJECTIVE APPROACHES IN SOLUTION OF THE PROBLEMS OF PROBABILITY THEORY AND DISCRETE MATHEMATICS

Natalya N. Zepnova
Cand. Sci. (Education), A/Prof.,
Irkutsk National Research Technical University
83 Lermontova St., Irkutsk 664074, Russia
E-mail: zepnova.nat@mail.ru

Oleg V. Kuzmin
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Irkutsk State University
1 Karla Marksa St., Irkutsk 664003, Russia
E-mail: quzminov@mail.ru

The article considers and analyzes the main types of errors made by students in solving the problems of probability theory related to the concept of a random event, as well as the problems of such branches of discrete mathematics as combinatorics, theory of sets, logistics. We have compared the subjective and objective approaches to solving this problems, gave their detailed solutions and methodical recommendations for teachers on improvement of the teaching process. The article can be useful for teachers of mathematics and specialists dealing with discrete and stochastic methods for solving problems, as well as for students studying these branches of probability theory and discrete mathematics.
Keywords: subjectivity; objectivity; random events; probability; combinatorics; logics; theory of sets; solution of problems; errors; methodology.