

Учредитель  
ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет»

# ВЕСТНИК

БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

# 1 / 2013



## Математика, информатика

Журнал издается  
с 2012 года

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-48732 от 28 февраля  
2012 г. Федеральная служба по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций  
(Роскомнадзор)

Ответственные за выпуск  
Д.О. Трунин, И.-Х.Д. Хишектуева

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.С. Булдаев, д-р физ.-мат. наук, проф.  
(гл. редактор)  
А.Д. Мижидон, д-р техн. наук, проф.  
В.И. Гурман, д-р техн. наук, проф.  
С.Н. Васильев, акад. РАН  
Д.Ш. Ширапов, д-р физ.-мат. наук, проф.  
В.Б. Цыренова, д-р пед. наук, доц.

В.В. Кибирев, канд. физ.-мат. наук, проф.  
Г.А. Шишкин, канд. физ.-мат. наук, проф.  
И.К. Шаранхаев, канд. физ.-мат. наук, доц.  
В.И. Антонов, канд. физ.-мат. наук, доц.  
И.Б. Юмов, канд. физ.-мат. наук, доц.  
Т.Г. Дармаев, канд. физ.-мат. наук, доц.

✉ АДРЕС РЕДАКЦИИ  
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
☎ 21-77-33 [vestnik\\_bsu\\_math@rambler.ru](mailto:vestnik_bsu_math@rambler.ru)

✉ АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ  
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
☎ 21-95-57, [riobsu@gmail.com](mailto:riobsu@gmail.com)

## Содержание

### 1. Управляемые системы и методы оптимизации

Гурман В.И., Фесько О.В., Расина И.В. Моделирование водоохраных мероприятий в бассейне реки .....	4
Трунин Д.О., Булдаев А.С. Об одном подходе к оптимизации нелинейных управляемых систем с терминальными ограничениями .....	15

### 2. Информационные системы и технологии

Хабитуев Б.В., Хандаров Ф.В., Балакшиев Э.Г., Нимаев С.А. Информационная система «Конференция».....	21
---	----

### 3. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

Кибирев В.В. Задача Коши в целом для бицилиндрической области голоморфности начальных данных .....	26
Улзыбаяр В. Точные конечно-разностные схемы для решения волнового уравнения .....	33
Шишкин Г.А. Краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с функциональным запаздыванием .....	41
Юмов И.Б. О захваченных волнах в акустическом волноводе с бесконечно тонким препятствием .....	46

### 4. Математическое моделирование

Анахин В.Д. Моделирование и нелинейная динамика вибрирующих систем .....	58
Ачитуев С.А., Очирбат Б. Оптимальное управление биологическими ресурсами с учетом инноваций .....	62
Воротынцев А.В. Графы работ для представления некоторых задач математической физики .....	67
Данеев Р.А. Об оптимальном размещении ПЭВМ на квазифрактальной поверхности .....	76
Цыдыпов Б.Д. Нестационарная диффузионная задача для сильноточных катодов плазмотронов. Постановка и метод решения .....	85

## Contents

<b>1. Controlled systems and methods of optimization</b>	
Gurman V.I., Fesko O.V., Rasina I.V. Modeling and optimization of water protection measures in the river basin .....	4
Trunin D.O., Buldaev A.S. On one approach to optimize nonlinear controlled systems with terminal constraints.....	15
<b>2. Information systems and technologies</b>	
Khabituev B.V., Khandarov F.V., Balakshiev E.G., Nimaev S.A. Information system "Conference".....	21
<b>3. Functional analysis and differential equations</b>	
Kibirev V.V. Cauchy problem on the whole for bicylindrical domain of initial data holomorphy .....	26
Ulziibayar V. Exact finite difference schemes for solving wave equation.....	33
Shishkin G.A. Boundary value problems for Volterra integro-differential equations with functional delay .....	41
Yumov I.B. On the trapped waves in acoustic waveguide with infinitely thin obstacle .....	46
<b>4. Mathematical modeling</b>	
Anakhin V.D. Modeling and nonlinear dynamics of oscillation processing systems .....	58
Achituev S.A., Ochirbat B. Optimal control of biological resources with innovation.....	62
Vorotyntsev A.V. Workflow graphs for presentation of some problems of mathematical physics .....	67
Daneev R.A. On optimum placement of PC at quasifractal surface ....	76
Tsydypov B.D. Nonstationary diffusion problem for high-current cathodes of plasmatrons. Statement and method of solution .....	85

# 1. Управляемые системы и методы оптимизации

УДК 517.97

© *В.И. Гурман, О.В. Фесько, И.В. Расина*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ВОДООХРАННЫХ МЕРОПРИЯТИЙ В БАСЕЙНЕ РЕКИ<sup>1</sup>

Рассматривается оптимизация природоохранной деятельности в водосборном бассейне реки с использованием двухуровневой модели сетевой структуры и общих достаточных условий оптимальности как обобщения соответствующих условий для дискретно-непрерывных динамических систем.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, дискретно-непрерывная модель, водоохранные мероприятия.

© *V.I. Gurman, O.V. Fesko, I.V. Rasina*

## MODELING AND OPTIMIZATION OF WATER PROTECTION MEASURES IN THE RIVER BASIN

The optimization of environmental activities in a river drainage basin using a two-level network model and general sufficient conditions of optimality is considered as a generalization of appropriate conditions for discrete-continuous dynamic systems.

**Keywords:** optimal control, discrete-continuous model, water protection measures.

### Введение

Речные бассейны – характерные объекты интенсивной антропогенной нагрузки. Одно из направлений снижения этой нагрузки состоит в регламентации хозяйственной деятельности посредством установления определенных норм и требований к количеству и качеству сточных вод от предприятий. Достаточно полное представление об этом дают монографии [1, 2].

Другое направление – регулярные природоохранные мероприятия по экологическому мониторингу и очистке скапливающихся загрязнений в водной среде и донных отложениях, бытового мусора, паразитической биоты и т.п. Такие мероприятия требуют больших затрат, поэтому актуальна задача их минимизации с использованием естественной самоочищающей способности природной среды.

Цель данной статьи – рассмотреть схематически эту задачу, которая не

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00256-а, 13-01-92200-Монг\_а) и Российского гуманитарного научного фонда (проект 11-02-00171-а)

укладывается в традиционные постановки задач оптимального управления. Для этого строится двухуровневая модель дискретно-непрерывной системы (ДНС), на нижнем уровне которой описываются непрерывные распределения примесей вдоль русел рек, а на верхнем – фигурирует сеть операторов, отражающая структуру бассейна как системы рек. Понятие абстрактной сети операторов введено впервые в [3] вместе с общими достаточными условиями как обобщением таковых для дискретной динамической модели [4].

Использование двухуровневой модели дает возможность эффективно декомпозировать соответствующую задачу управления на «однородные» подзадачи так, чтобы применить известные методы для однородных непрерывных и дискретных систем, в данном случае методы, развитые в работах В.Ф. Кротова и его последователей [5-8].

### 1. Постановка задачи

Задача рассматривается в упрощенной постановке на примере условного речного бассейна: главная река с двумя притоками (рис. 1).

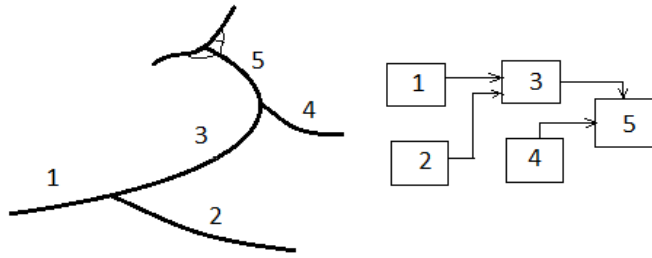


Рис. 1

Можно построить камерную модель этого бассейна, разделив его на 5 камер, как показано на рис. 1. В каждой камере распределение концентрации загрязнений вдоль русла описывается некоторой дифференциальной системой, которую примем линейной

$$\frac{dp}{dt} = A(t)p + B(t)r + s(t), \quad t \in [0, t_F], \quad 0 \leq r \leq r_{\max}, \quad (1)$$

где  $t$  имеет смысл расстояния от начала соответствующей камеры,  $p$  – вектора концентраций загрязнений,  $r$  – вектора интенсивностей природоохранных мероприятий,  $s$  – вектора потоков поступающих загрязнений. Здесь все величины имеют номер соответствующей камеры  $k = 1, \dots, 5: t_k, p_k, \dots$ , который для краткости опущен. Задача состоит в обеспечении допустимых концентраций в устьях рек,  $p_k(t_F) \leq p_{k \max}$ , с минимумом суммарных затрат, определяемых величиной

$$Q = \sum_{k=1}^5 q_{kF}, \quad q_{kF} = \int_0^{t_{kF}} c_k(t) r_k(t) dt.$$

Размерности векторов концентраций в разных камерах могут быть разными в зависимости от формы и размеров поперечного сечения русла, условий перемешивания и т.п.

Примем для простоты  $p$  и  $r$  одномерными,  $B = -1$ ,  $A$ ,  $c$ ,  $s$  – постоянными для каждой камеры. При естественном предположении  $p \geq 0$  для любых управлений в указанных границах ограничение  $p(t_F) \leq p_{\max}$  можно заменить штрафом и минимизировать взвешенную сумму

$$I = \sum_1^5 I_k, I_k = (\beta_k q_{kF} + (1 - \beta_k) p_{kF}), 0 < \beta_k < 1.$$

Для решения задачи построим соответствующую двухуровневую дискретно-непрерывную модель, на верхнем уровне которой фигурирует сеть операторов, которая, согласно [3], определяется следующим образом.

Пусть имеется  $N$  операторов произвольной природы

$$f_k : \mathbb{X}_k \times \mathbb{U}_k \rightarrow \mathbb{Y}_k \quad (y_k = f(k, x_k, u_k)). \quad (2)$$

Вводятся подмножества  $\mathbb{X}_{kq}$ , такие, что  $\prod_{q=1}^{n_k} \mathbb{X}_{kq} = \mathbb{X}_k$ . Будем говорить,

что выход оператора  $l$  подается на вход оператора  $k$ , если для некоторого  $q$  имеет место равенство  $\chi(k, q, x_k) = y_l$ , где  $\chi(k, q, x_k)$  – оператор проектирования на подмножество  $\mathbb{X}_{kq}$ .

Пусть рассматриваемые операторы соединены указанным образом по некоторой схеме, представляемой ориентированным графом (рис. 2). Предполагается, что для данного  $k$  между номерами  $q$  и  $l$  имеет место взаимно-однозначное соответствие. Иными словами,  $\mathbb{X}_k$  олицетворяет множество входов  $k$ -го оператора, занятых в соединениях, а  $\mathbb{U}_k$  – множество свободных входов.

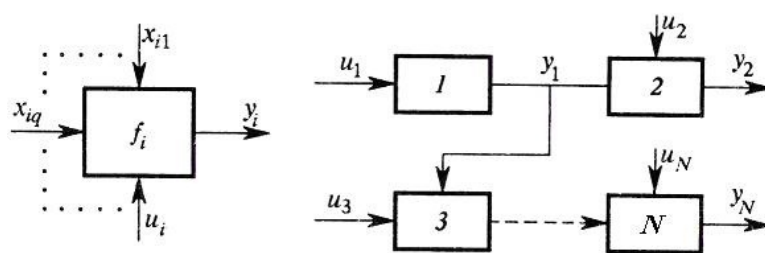


Рис. 2

В качестве общей модели двухуровневой управляемой системы предлагается следующая конкретизация указанной абстрактной модели. Представим условие  $(x_k, u_k) \in \mathbf{B}(k)$  в форме  $x_k \in \mathbf{X}(k)$ ,  $u_k \in \mathbf{U}(k, x_k)$ , где  $\mathbf{X}(k)$  – проекция на  $\mathbb{X}_k$ ,  $\mathbf{U}(k, x_k)$  – сечение  $\mathbf{B}(k)$  при данных  $k$ ,  $x_k$ . Пусть на

некотором подмножестве  $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K} = \{1, \dots, N\}$  имеем  $u = (u^d, m^c)$ , где  $u^d$  – произвольной природы, а  $m^c$  – некоторый непрерывный управляемый процесс, так что сечение множества  $\mathbf{U}(k, x)$  при фиксированных  $x, u^d$  есть допустимое множество  $\mathbf{D}^c(k, x, u^d)$  с соответствующей дифференциальной системой

$$\dot{x}^c = \frac{dx^c}{dt} = f^c(z, t, x^c, u), \quad t \in \mathbf{T}(z),$$

$$x^c \in \mathbf{X}^c(z, t) \subset \mathbf{R}^{n(k)}, \quad u^c \in \mathbf{U}^c(z, t, x^c) \subset \mathbf{R}^{p(k)}, \quad z = (k, x, u^d).$$

Оператор правой части (2) сводится к следующему:

$$y_k = f(k, x, u) = \theta(z, \gamma^c),$$

$$\gamma^c = (t_I, x_I^c, t_F, x_F^c) \in \{\gamma^c : t_I = \tau(z), x_I^c = \xi(z), t_F = \vartheta(z), x_F^c \in \Gamma^c(z)\}.$$

Решением этой комбинированной системы будем считать набор  $m = (x(k), u(k)) \in \mathbf{D}$ , где при  $k \in \mathbf{K}'$ :

$$u(k) = (u^d(k), m^c(k)), \quad m^c \in \mathbf{D}^c(t, x(k), u^d(k)).$$

Задача оптимизации формулируется для верхнего уровня как задача о минимуме функционала

$$I = \sum_1^N I_k(y_k) = \sum_1^N I_k(f(k, x_k, u_k)) = \sum_1^N f^0(k, x_k, u_k)$$

на множестве  $\mathbf{D}$  наборов  $m = \{(x_k, u_k)\}$ ,  $k=1, \dots, N$ , связанных указанными соотношениями сети и возможными дополнительными ограничениями вида  $(x_k, u_k) \in \mathbf{B}(k)$ , где  $\mathbf{B}(k)$  – заданное при каждом  $k$  множество. Требуется найти минимизирующую последовательность  $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ , т.е. такую, что  $I(m_s) \rightarrow \inf_{\mathbf{D}} I$ .

Для решения этой общей задачи вводится множество  $\mathbf{E}$  элементов  $m$ , не связанных сетевыми условиями – равенствами  $\chi(k, j, x_k) = y_j$  – на верхнем уровне и дифференциальными связями на нижнем.

Достаточные условия оптимальности для нее получаются по аналогии с динамическими дискретно-непрерывными процессами [9, 10].

Для номеров  $k \in \mathbf{K}'$  вводится дополнительно параметрическое семейство (с параметром  $z$ ) гладких функций  $\varphi^c : \mathbf{R}^{m(k)+1} \rightarrow \mathbf{R}$ . Строится соответствующая модификация обобщенного лагранжиана [9, 10]:

$$L = - \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'} R_k - \sum_{\mathbf{K}'} R'_k,$$

где

$$R_k = R(k, x, u) = \sum_{l=1}^N (\varphi(k, l, f(k, x, u)) - \varphi(l, k, \chi(k, l, x))) - f^0(k, x, u),$$

где  $\varphi(k, l, y_k)$ ,  $k, l=1, \dots, N$  – произвольные функционалы, такие, что  $\varphi(k, l, y_k) \equiv 0$ , если равенство  $\chi(k, j, x_k) = y_j$  отсутствует (отсутствует

связь  $l \rightarrow k$ ).

$$\begin{aligned}
 R'_k &= G(z, \gamma^c) + \int_{\Gamma(z)} \left( R^c(z, t, x^c(z, t), u^c(z, t)) - \mu^c(z) \right) dt, \\
 G(z, \gamma^c) &= \sum_{l=1}^N \left( \varphi(k, l, y_k) - \varphi(l, k, \chi(k, j, x_k)) \right) + \\
 &+ \varphi^c(z, t_l, x_l^c) - \varphi^c(z, t_F, x_F^c) + \int_{\Gamma(z)} \mu^c(z, t) dt - I_k(\theta(z, \gamma^c)), \\
 R^c(z, t, x^c, u^c) &= \varphi_{x^c}^{cT} f^c(z, t, x^c, u^c) + \varphi_t^c(z, t, x^c), \\
 \mu^c(z, t) &= \sup \{ R^c : x^c \in \mathbf{X}^c(z, t), u \in \mathbf{U}^c(z, t, x^c) \},
 \end{aligned}$$

где  $y_k = \theta(z, \gamma^c)$  при  $k \in \mathbf{K}'$ ,  $y_k = f(k, x, u)$  при  $k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'$ . Обозначим

$$\begin{aligned}
 \mu'(k) &= \sup \{ G(z, \gamma^c) : \gamma^c \in \Gamma^c(z), x_l^c \in \mathbf{X}^c(z, t_l), \\
 &x_F^c \in \mathbf{X}^c(z, t_F), u^d \in \mathbf{U}^d(k), x \in \mathbf{X}(k) \}.
 \end{aligned}$$

Легко убедиться, что  $L(m) = I(m)$  при  $m \in \mathbf{D}$ , т.е. при выполнении отброшенных связей. Для этого рассмотрим вначале выражение для функции  $R^c$ . При выполнении дифференциальной связи в (3)

$R^c(z, t, x^c, u^c) = \frac{d\varphi^c}{dt}$ . Тогда

$$\int_{\Gamma(z)} R^c dt = \int_{\Gamma(z)} \frac{d\varphi^c}{dt} dt = \varphi^c(z, t_F, x_F^c) - \varphi^c(z, t_l, x_l^c).$$

С учетом этого, а также равенств  $\chi(k, l, x_k) = y_l$  (т.е. выполнения сетевых связей) получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mathbf{K}'} R'_k &= \sum_{\mathbf{K}'} \sum_{l=1}^N \left( \varphi(k, l, y_k) - \varphi(l, k, y_l) \right) + \\
 &+ \varphi^c(z, t_l, x_l^c) - \varphi^c(z, t_F, x_F^c) + \int_{\Gamma(z)} \mu^c(z, t) dt - I_k(y_k) - \\
 &- \varphi^c(z, t_l, x_l^c) + \varphi^c(z, t_F, x_F^c) - \int_{\Gamma(z)} \mu^c(z, t) dt.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\sum_{\mathbf{K}'} R'_k = \sum_{\mathbf{K}'} \sum_{l=1}^N \left( \varphi(k, l, y_k) - \varphi(l, k, y_l) \right) - I_k(y_k).$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 L &= - \sum_{\mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'} R_k - \sum_{\mathbf{K}'} R'_k = \\
 &= - \sum_{k, l=1}^N \left( \varphi(k, l, x(l)) - \varphi(l, k, x(k)) \right) + \sum_{k=1}^N I_k(y_k) = I.
 \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно вытекает следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть имеются последовательность дискретно-



непрерывных элементов  $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$  и пара  $(\varphi, \varphi^c)$  такие, что:

- 1)  $\mu^c(z, t)$  – кусочно-непрерывна при каждом  $z$ ;
- 2)  $R(k, x_s(k), u_s(k)) \rightarrow \mu(k) \quad k \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{K}'$ ;
- 3)  $\int_{\Gamma(z_s(k))} (R^c(z_s(k), t, x_s^c(k, t), u_s(k, t)) - \mu^c(z_s(k), t)) dt \rightarrow 0, \quad k \in \mathbf{K}'$ ;
- 4)  $G(z_s(k), \gamma_s^c(k)) - \mu'(k) \rightarrow 0, \quad k \in \mathbf{K}'$ .

Тогда  $\{m_s\}$  – минимизирующая последовательность  $I$  на  $\mathbf{D}$ .

## 2. Решение задачи для бассейна реки

Представим рассматриваемую модель распространения загрязнений в бассейне реки как ДНС, на верхнем уровне которой находится сеть (дереву) операторов, а на нижнем – система из уравнения (1) и уравнения

$$\frac{dq}{dt} = cr, \quad q(0) = 0,$$

где  $cr$  имеет смысл природоохранных затрат на единицу длины соответствующей камеры (здесь номер  $k$  также не указан).

Положим при  $k = 1, 2, 4$  (операторы только со свободными входами):

$$x_k = (x_k^1, x_k^2) = \text{const}, \quad p_{kl} = p_{kl} = x_{k1}^1;$$

при  $k = 3, 5$ :

$$x_k = (x_{k1}^1, x_{k1}^2, x_{k2}^1, x_{k2}^2), \quad p_{kl} = x_{k1}^1 + x_{k2}^1.$$

Сетевые связи выражаются следующим образом:

$$x_{31} = y_1, \quad x_{32} = y_2, \quad x_{51} = y_3, \quad x_{52} = y_4.$$

Обозначим  $x^c = (p, q)^T$ ,  $y = x^c(t_F)$ ,  $k = 1, \dots, 5$ . Тогда рассматриваемая дифференциальная система и функционал  $I_k$  для каждой камеры запишутся в виде

$$\frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + B^c u^c + s^c, \quad 0 \leq u^c = r \in [0, p_{\max}].$$

$$I_k = C_k^0 x_{kF}^c,$$

$$\text{где } A^c = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^c = \begin{bmatrix} -1 \\ c \end{bmatrix}, \quad s^c = (s, 0)^T, \quad C_k^0 = [(1 - \beta_k) \quad \beta_k].$$

Здесь

$$\theta(z, \gamma^c) = y_k = x_{kF}^c, \quad \Gamma^c(z) = \{\gamma^c : t_{kl} = 0, t_{kF} = \text{const}, x_{kl}^c = \kappa_k x_k\},$$

$$\kappa_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 3, 5.$$

Оператор проектирования  $\chi(k, j, x)x$  в данном случае – линейная функция:  $\chi(k, j, x) = \lambda(k, j)x$ ,  $\lambda(k, j)$  – блочная матрица:  $\lambda(k, 1) = [E \ 0]$ ,  $\lambda(k, 2) = [0 \ E]$ .

Функции  $\varphi$  и  $\varphi^c$  зададим линейными (с учетом линейности модели):

$$\varphi(k, l, y_l) = \psi^T(k, l)y_l, \quad \varphi^c(k, t, x^c) = v^c(k, t) + \psi^{cT}(k, t)x^c.$$

Выпишем соответствующие выражения для  $G$  и  $R^c$ , полагая  $\mu^c = 0$ :

$$\begin{aligned} R^c &= \psi^{cT} \left( A^c(t)x^c + B^c(t)u^c + s^c(t) \right) + \dot{\psi}^{cT}x^c + v^c, \\ G &= \sum_l \left( \psi^T(k, l)x_{kF}^c - \psi^T(l, k)\lambda(k, l)x \right) + \\ &+ \psi^{cT}(k, 0)\kappa_k x - \psi^{cT}(k, t_{kF})x_{kF}^c - C_k^0 x_{kF}^c, \\ \mu^c(k, t) &= \sup \{ R^c : u^c \in U^c(k, t) \} = 0. \end{aligned}$$

Согласно рассматриваемому графу будем иметь 5 функций  $\varphi^c$  нижнего уровня по числу дифференциальных операторов и 4 ненулевые функции  $\varphi$  верхнего уровня, соответствующие имеющимся сетевым связям, т.е. все  $\psi(k, l)$  равны нулю, за исключением  $\psi(1, 3)$ ,  $\psi(2, 3)$ ,  $\psi(3, 5)$ ,  $\psi(4, 5)$ .

Из условий максимума  $R^c$  по  $x^c$  и  $u^c$ ,  $G$  по  $x_{kF}^c$  и  $x$  и  $\mu^c = 0$  получаем

$$\begin{aligned} \dot{v}^c &= -\sup \{ \psi^{cT} (B^c(k, t)u^c + s^c) : u^c \in U^c \}, \\ \dot{\psi}^c &= -A^{cT}(k, t)\psi^c \quad (\dot{\psi}^{c1} = -A(k, t)\psi^{c1}, \dot{\psi}^{c2} = 0), \\ \psi^c(k, t_F) &= \sum_l \psi(k, l) - C_k^{0T}, \quad \kappa_k^T \psi^c(k, t_l) = \sum_l \lambda^T(k, l)\psi(l, k). \end{aligned}$$

Последнее равенство должно выполняться для операторов с занятыми входами (номера  $k = 3, 5$ ). Конкретно для ненулевых значений  $\psi(k, l)$ :

$$\begin{aligned} \psi^c(1, t_{1F}) &= \psi(1, 3) - C_1^{0T}, \quad \psi^c(2, t_{2F}) = \psi(2, 3) - C_2^{0T}, \\ \psi^c(3, t_{3F}) &= \psi(3, 5) - C_3^{0T}, \quad \psi^c(4, t_{4F}) = \psi(4, 5) - C_4^{0T}, \quad \psi^c(5, t_{5F}) = -C_5^{0T}, \\ \kappa_3^T \psi^c(3, t_{3l}) &= \lambda^T(3, 1)\psi(1, 3) + \lambda^T(3, 2)\psi(2, 3), \\ \kappa_5^T \psi^c(5, t_{5F}) &= \lambda^T(5, 1)\psi(3, 5) + \lambda^T(5, 2)\psi(4, 5), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\kappa_k$  и  $\lambda^T(k, j)$  выписаны выше. После подстановки значений этих матриц получим

$$\psi(1, 3) = \psi(2, 3) = (\psi^{c1}(3, 0), 0)^T, \quad \psi(3, 5) = \psi(4, 5) = (\psi^{c1}(5, 0), 0)^T.$$

Из уравнений (3) получаем

$$\psi^{c1} = \psi^{c1}(t_{kF})e^{A(t_{kF}-t)}, \quad \psi^{c1}(k, 0) = \psi^{c1}(t_{kF})e^{At_{kF}}, \quad \psi^{c2} = \text{const} = -C^{02T} = -\beta_k,$$

где

$$\psi^{c1}(t_{5F}) = -(1 - \beta_5), \psi^{c1}(t_{kF}) = -(1 - \beta_5)e^{At_{5F}} - (1 - \beta_k), k = 3, 4,$$

$$\psi^{c1}(t_{kF}) = -((1 - \beta_5)e^{At_{5F}} + (1 - \beta_3))e^{At_{3F}} - (1 - \beta_k), k = 1, 2.$$

В итоге получаются конкретные значения  $\psi(k, l)$  и зависимости  $\psi^c(t)$ . Оптимальные управления находятся из условия  $R^c$ , которое, очевидно, сводится к следующему:

$$(\psi^{c2}(k, t)c_k - \psi^{c1}(k, t))r \rightarrow \max_{0 \leq r \leq r_{k \max}},$$

т.е. управление будет кусочно-постоянным со значениями 0 либо  $r_{k \max}$  в зависимости от знака функции переключения  $\psi^{c2}(k, t)c_k - \psi^{c1}(k, t)$ , которая, как видно, зависит от весов  $\beta_k$ . Последние подбираются так, чтобы для соответствующих распределений загрязнений по руслам выполнялись заданные ограничения. При этом получаются следующие конкретные выражения для функций переключения  $M_k(t_k)$ :

$$M_5(t_5) = (1 - \beta_5)e^{A(t_{5F} - t_5)} - \beta_5 c_5,$$

$$M_k(t_k) = (1 - \beta_k)e^{A(t_{5F} + t_{kF} - t_k)} - \beta_k c_k, k = 3, 4,$$

$$M_k(t_k) = (1 - \beta_k)e^{A(t_{5F} + t_{3F} + t_{kF} - t_k)} - \beta_k c_k, k = 1, 2.$$

Были проведены расчеты для условного бассейна, близкого по характеристикам к нижней части бассейна р. Селенги – главного притока оз. Байкал. Данные для расчетов содержатся в таблице.

Таблица

№	$t_F$	$A$	$c$ , млн руб. км <sup>4</sup> /Г	$S$ , Т/км <sup>4</sup>	$p_l$ , Т/км <sup>3</sup>	$r_{\max}$ , Т/км <sup>4</sup>
1	20	$2.5 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^2$	$0.5 \times 10^{-2}$	0.4	$0.6 \times 10^{-2}$
2	30	$3 \times 10^{-3}$	$10^3$	$0.2 \times 10^{-2}$	$0.3 \times 10^{-1}$	$0.25 \times 10^{-2}$
3	30	$2.5 \times 10^{-3}$	$7 \times 10^2$	$0.3 \times 10^{-2}$	-	$0.35 \times 10^{-2}$
4	20	$3 \times 10^{-3}$	$10^3$	$0.2 \times 10^{-2}$	$0.4 \times 10^{-1}$	$0.25 \times 10^{-2}$
5	150	$2.5 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^2$	$0.5 \times 10^{-2}$	-	$0.6 \times 10^{-2}$

Значения весов  $\beta_k$  задавались равными:  $\beta_k = \beta$ . В этом случае непосредственно видно, что всюду  $r_k = 0, Q = 0$  при  $\beta = 1$ , т.е. затраты отсутствуют, а загрязнение максимально, а при  $\beta = 0$   $r_k = r_{k \max}$ , т.е. интенсивность очистки всюду максимальна. Результаты расчетов для промежуточных значений  $\beta$  представлены на рис. 4–6.

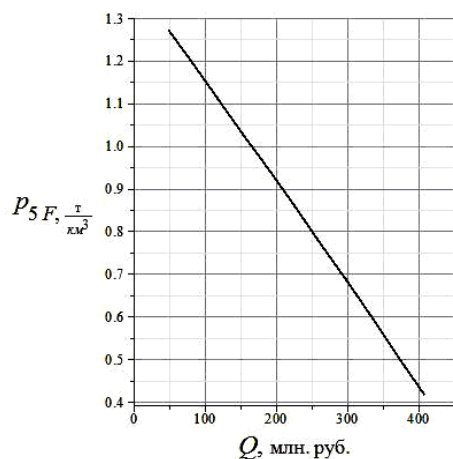


Рис. 3

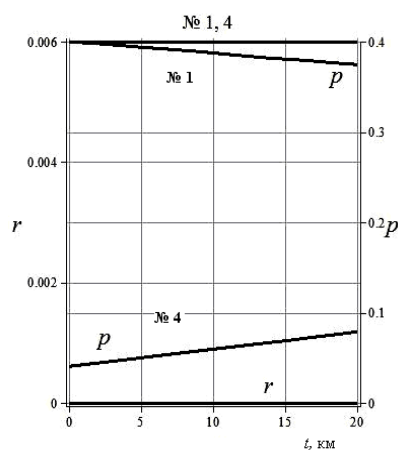


Рис. 4

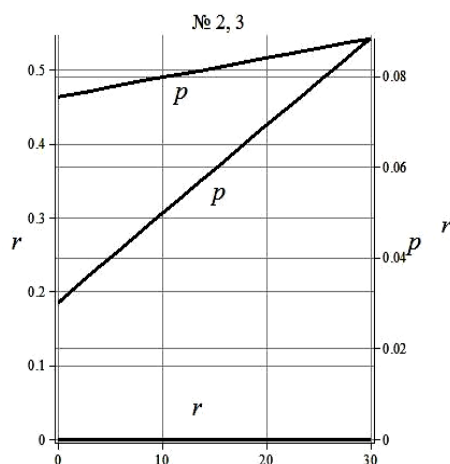


Рис. 5

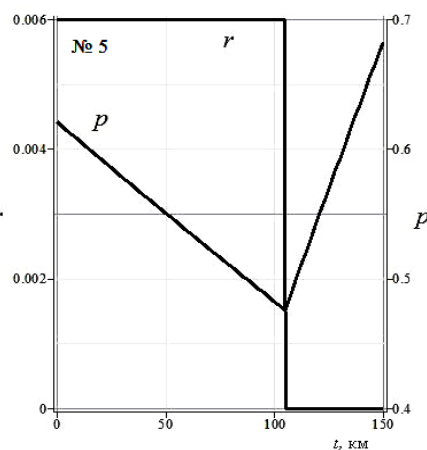


Рис. 6

Зависимость  $p_{5F}(Q)$  (рис. 3) служит для выбора варианта стратегии природоохранной деятельности с учетом располагаемых ресурсов.

На рис. 4–6 показаны распределения управляющих воздействий  $r_k(t)$  и соответствующих концентраций загрязнений  $p(t)$  во всех камерах при заданном значении суммарных затрат  $Q = 300$  млн руб. Видно характерное свойство оптимального решения при рассматриваемом критерии: экономия ресурсов производится в первую очередь за счет прекращения природоохранной деятельности на конечных участках бассейна (в данном случае – во всей камере 4 и на последних 45 километрах в камере 5), что по смыслу означает рациональное использование самоочищающей способности, представленной коэффициентом  $A$ .

### **Заключение**

Описанная двухуровневая модель распространения примесей в бассейне реки на основе абстрактной сети операторов является новым шагом на пути иерархического представления систем неоднородной структуры – от чисто динамических к более общему классу систем сетевой структуры. Эта модель позволяет эффективно решать соответствующие сложные задачи оптимизации по принципу декомпозиции на однородные подсистемы и задачи, к которым применимы известные методы теории оптимального управления, ставшие уже классическими.

Упрощенное описание моделей нижнего уровня выбрано лишь для иллюстрации общего подхода; на самом деле он сохраняется и для значительно более сложных описаний, рассматриваемых при решении конкретных практических проблем, связанных с эффективным планированием водоохраных мероприятий как частью общей стратегии устойчивого развития соответствующей природной территории, например, такой как Байкальский регион.

### **Литература**

1. Константинов Г.Н. Нормирование воздействий на динамические системы. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983.
2. Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом / А.Б. Анохин и др. – Новосибирск: Наука, 1987.
3. Гурман В.И. Оптимизация дискретных систем: учеб. пособие. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1976.
4. Кротов В.Ф. Достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых систем // ДАН СССР. – 1967. – Т. 172. № 1. – С. 18-21.
5. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.
6. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1977.
7. Krotov V.F. Global Methods in Optimal Control Theory. – New York: Marcel Dekker, 1996.
8. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1997.
9. Расина И.В. Дискретно-непрерывные модели и оптимизация управляемых процессов // Программные системы: теория и приложения: электрон. науч. журн. ИПС РАН. – 2011. – № 5(9). – С. 49-72.
10. Расина И.В. Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов // АиТ. – 2012. – № 10. – С. 3-15.

*Гурман Владимир Иосифович*, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, тел.: (48535)98053. E-mail: [vig70@mail.ru](mailto:vig70@mail.ru)

*Фесько Олесь Владимирович*, аспирант, инженер ИПС им. А.К. Айламазяна РАН. E-mail: [oles.fesko@live.com](mailto:oles.fesko@live.com)

*Расина Ирина Викторовна*, кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой математических и естественнонаучных дисциплин Сибирской академии права, экономики и управления (САПЭУ), г. Иркутск, тел. (3952)422869. E-mail: [irinasina@gmail.com](mailto:irinasina@gmail.com)

*Gurman Vladimir Iosifovich*, doctor of technical sciences, professor, principal researcher, Ailamazyan Program Systems Institute RAS, ph.: +7 (48535)98053. E-mail: [vig70@mail.ru](mailto:vig70@mail.ru)

*Fesko Oles Vladimirovich*, postgraduate student, engineer, Ailamazyan Program Systems Institute RAS. E-mail: [oles.fesko@live.com](mailto:oles.fesko@live.com)

*Rasina Irina Viktorovna*, candidate of physical and mathematical sciences, head of department of mathematical and natural sciences, Syberian Academy of Law, Economics and Management. E-mail: [irinasina@gmail.com](mailto:irinasina@gmail.com)

УДК 517.977

© Д.О. Трунин, А.С. Булдаев

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПТИМИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ<sup>1</sup>

В статье предлагается процедура нелокального улучшения допустимых управлений для нелинейных задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, нелокальное улучшение, терминальные ограничения.

© D.O. Trunin, A.S. Buldaev

## ON ONE APPROACH TO OPTIMIZE NONLINEAR CONTROLLED SYSTEMS WITH TERMINAL CONSTRAINTS

In the article a nonlocal improvement procedure of admissible control for nonlinear optimal control problems with terminal constraints is proposed.

**Keywords:** nonlinear optimal control problem, nonlocal improving, terminal constraints.

### Введение

В работе [1] в классе полиномиальных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом построены методы нелокального улучшения управлений, основанные на нестандартных формулах приращения функционала без остаточных членов разложений. Отсутствие операции варьирования управлений и возможность улучшения управлений, удовлетворяющих принципу максимума, обуславливают повышенную эффективность построенных методов. В работе [2] эти методы обобщены на класс нелинейных задач оптимального управления со свободным правым концом. В данной статье предлагается процедура нелокального улучшения допустимых управлений для нелинейных задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления с частично закрепленным правым концом

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00914-а, 12-01-98011-р\_сибирь\_а, 13-01-92200-Монг\_а)

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

$$x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = \overline{1, m}, \quad m \leq n, \quad (4)$$

в которой  $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  – вектор состояния,  $u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$  – вектор управления, интервал  $T$  фиксирован,  $x^0 \in R^n$  – заданный вектор,  $x_i^1, i = \overline{1, m}$  – заданные числа, функция  $\varphi(x)$  не зависит от первых  $m$  компонент вектора  $x$ . Функции  $f(x, u, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $F(x, u, t)$  непрерывно дифференцируемы по своим аргументам в областях определения.

В качестве доступных управлений рассматривается множество кусочно-непрерывных функций со значениями в компактном множестве  $U \subset R^r$

$$V = \{u \in PC^r(T) : u(t) \in U, t \in T\}.$$

Для каждого доступного управления  $u \in V$  обозначим  $x(t, u), t \in T$  – решение задачи Коши (1), (2) при  $u = u(t)$ .

Определим множество допустимых управлений

$$W = \{u \in V : x_i(t_1, u) = x_i^1, i = \overline{1, m}\}.$$

В задаче (1)-(4) составим нормальный функционал Лагранжа

$$L(u, \lambda) = \Phi(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i(t_1) - x_i^1).$$

Функция Понтрягина с сопряженной переменной  $p \in R^n$  имеет вид

$$H(p, x, u, t) = \langle p, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t).$$

Приращение функционала Лагранжа на паре доступных управлений  $(u^0, v)$  в соответствии с [2] имеет вид

$$\begin{aligned} L(v, \lambda) - L(u^0, \lambda) = \\ = - \int_T (H(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), v(t), t) - H(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), u^0(t), t)) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $p(t, u^0, v, \lambda)$  – решение модифицированной дифференциально-алгебраической сопряженной системы

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \quad (6)$$

$$\langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x(t, v) - x(t, u^0) \rangle + \langle r(t), x(t, v) - x(t, u^0) \rangle = \quad (7)$$

$$= H(p, x(t, v), u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t),$$

$$p_i(t_1) = -\lambda_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (8)$$

$$p_j(t_1) = -\varphi_{x_j}(x(t_1, u^0)) - q_j, \quad j = \overline{m+1, n}, \quad (9)$$



$$\begin{aligned} & \sum_{j=m+1}^n \left[ \varphi_{x_j}(x(t_1, u^0)) (x_j(t_1, v) - x_j(t_1, u^0)) \right] + \\ & + \sum_{j=m+1}^n \left[ q_j (x_j(t_1, v) - x_j(t_1, u^0)) \right] = \varphi(x(t_1, v)) - \varphi(x(t_1, u^0)). \end{aligned} \quad (10)$$

Введем отображение

$$u^*(p, x, t) = \arg \max_{v \in U} H(p, x, v, t), \quad p \in R^n, x \in R^n, t \in T.$$

## 2. Метод нелокального улучшения

Поставим задачу улучшения управления  $u^0 \in W$ : найти управление  $v \in W$  со свойством  $\Phi(v) \leq \Phi(u^0)$ .

1. Найдем решение  $(x(t), p(t))$ ,  $t \in T$

дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^*(p, x, t), t), \quad t \in T, \\ \dot{p} &= -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \\ \langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x - x(t, u^0) \rangle + \langle r(t), x - x(t, u^0) \rangle &= \\ &= H(p, x, u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ x(t_0) &= x^0, \quad x_i(t_1) = x_i^1, \quad i = \overline{1, m}, \\ p_j(t_1) &= -\varphi_{x_j}(x(t_1, u^0)) - q_j, \quad j = \overline{m+1, n}, \\ & \sum_{j=m+1}^n \left[ \varphi_{x_j}(x(t_1, u^0)) (x_j(t_1) - x_j(t_1, u^0)) \right] + \\ & + \sum_{j=m+1}^n \left[ q_j (x_j(t_1) - x_j(t_1, u^0)) \right] = \varphi(x(t_1)) - \varphi(x(t_1, u^0)). \end{aligned} \quad (11)$$

2. Сформируем управление  $v(t) = u^*(p(t), x(t), t)$ ,  $t \in T$ .

Предположим, что решение  $(x(t), p(t))$ ,  $t \in T$  краевой задачи (11) (возможно, не единственное) существует на  $T$ . Тогда  $x(t) = x(t, v)$  и  $v \in W$ .

Покажем свойство улучшения для выходных управлений.

Действительно, решение  $p(t)$ ,  $t \in T$  является решением системы (6), (7) и удовлетворяет условиям (9), (10).

Обозначим

$$\bar{\lambda}_i = -p_i(t_1), \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда условия (8) выполняются и  $p(t) = p(t, u^0, v, \bar{\lambda})$ ,  $t \in T$ .

Следовательно, в соответствии с формулой приращения (5) выходное управление  $v$  обеспечивает невозрастание функционала Лагранжа

$$L(v, \bar{\lambda}) \leq L(u^0, \bar{\lambda}).$$

Отсюда, в силу допустимости управлений  $u^0, v$  получаем

$$\Phi(v) \leq \Phi(u^0).$$

Алгебраические соотношения краевой задачи (11) всегда можно разрешить по аналогии с [2] относительно величин  $r(t), q_j$  и тем самым свести дифференциально-алгебраическую краевую задачу (11) к обычной дифференциальной задаче. Определяя различные однозначные способы разрешения алгебраических уравнений, можно получать модификации метода улучшения с различными дифференциальными краевыми задачами.

### 3. Примеры

Пример 1.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1^2, \quad t \in T = [0, 4], \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \\ \Phi(u) &= x_2(4) \rightarrow \min, \quad x_1(4) = 1. \end{aligned}$$

В данном случае

$$H = p_1 u + \frac{1}{2} p_2 x_1^2.$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления  $u^0(t) \equiv 0$ , которому соответствуют фазовые траектории  $x_1(t, u^0) \equiv 1, x_2(t, u^0) = \frac{t}{2}, t \in T$  и значение целевого функционала  $\Phi(u^0) = 2$ .

В данной задаче

$$u^*(p, x, t) = \text{sign } p_1.$$

Таким образом, краевая задача улучшения принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1^2, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(4) = 1, \\ \dot{p}_1 &= -p_2 - r_1(t), \quad \dot{p}_2 = -r_2(t), \quad p_2(4) = -1, \\ r_1(t)(x_1 - 1) + r_2(t)\left(x_2 - \frac{t}{2}\right) &= \frac{p_2}{2}(x_1^2 - 1) - p_2(x_1 - 1). \end{aligned}$$

Полагая  $r_2(t) \equiv 0$  (тогда  $p_2(t) \equiv -1$ ), получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad x_1(0) = 1, \quad x_1(4) = 1, \\ \dot{p}_1 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Эта краевая задача имеет решение

$$x_1(t) = \begin{cases} -t+1, & t \in [0, 2], \\ t-3, & t \in [2, 4]. \end{cases} \quad p_1(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{4} + t - 1, & t \in [0, 2], \\ \frac{t^2}{4} - t + 1, & t \in [2, 4]. \end{cases}$$

$$\text{Соответствующее выходное управление } v(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 2), \\ 1, & t \in [2, 4]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что управление  $v(t)$  является улучшающим:  
 $\Phi(v) = \frac{2}{3} < \Phi(u^0) = 2$ .

Пример 2.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2, \quad t \in T = [0, 2], \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 0, \quad |u(t)| \leq 1, \\ \Phi(u) &= x_2(2) \rightarrow \min, \quad x_1(2) = 0. \end{aligned}$$

В данном случае

$$H = p_1 u - p_2 x_1^2.$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления  $u^0(t) \equiv 0$ , которому соответствуют фазовые траектории  $x_1(t, u^0) \equiv 0$ ,  $x_2(t, u^0) \equiv 0$ ,  $t \in T$  и значение целевого функционала  $\Phi(u^0) = 0$ .

В данной задаче

$$u^*(p, x, t) = \text{sign } p_1.$$

Таким образом, краевая задача улучшения принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(2) = 0, \\ \dot{p}_1 &= -r_1(t), \quad \dot{p}_2 = -r_2(t), \quad p_2(2) = -1, \\ r_1(t)x_1 + r_2(t)x_2 &= -p_2 x_1^2. \end{aligned}$$

Полагая  $r_2(t) \equiv 0$  (тогда  $p_2(t) \equiv -1$ ), получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(2) = 0, \\ \dot{p}_1 &= -x_1. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что пара  $x_1(t) \equiv 0$ ,  $p_1(t) \equiv 0$ ,  $t \in T$  является решением краевой задачи, т.е. управление  $u^0$  удовлетворяет регулярному принципу максимума с  $\lambda_1 = 0$  (особое управление).

Кроме того, краевая задача имеет решение

$$x_1(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ 2-t, & t \in [1, 2]. \end{cases} \quad p_1(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}, & t \in [0, 1], \\ \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Соответствующее выходное управление

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), \\ -1, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что управление  $v(t)$  является улучшающим:

$$\Phi(v) = -\frac{2}{3} < \Phi(u^0) = 0.$$

### Заключение

Предлагаемая процедура обеспечивает нелокальное улучшение допустимых управлений без процедуры варьирования в малой окрестности улучшаемого управления с выполнением всех терминальных ограничений. Это свойство является существенным фактором повышения эффективности решения нелинейных задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

### Литература

1. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. – 260 с.
2. Булдаев А.С., Моржин О.В. Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Известия Иркутского государственного университета. – Сер. Математика. – 2009. – Т. 2. – № 1. – С. 94-106.

*Трунин Дмитрий Олегович*, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел.: (301-2) 217733, e-mail: hint@rambler.ru

*Булдаев Александр Сергеевич*, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел.: (301-2) 217733, e-mail: buldaev@mail.ru

*Trunin Dmitry Olegovich*, candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer, applied mathematics department, Buryat State University, e-mail: hint@rambler.ru

*Buldaev Alexander Sergeevich*, doctor of physical and mathematical sciences, professor, applied mathematics department, Buryat State University, e-mail: buldaev@mail.ru

## 2. Информационные системы и технологии

УДК 004.9

© *Б.В. Хабитуев, Ф.В. Хандаров, Э.Г. Балакшиев, С.А. Нимаев*

### ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА «КОНФЕРЕНЦИЯ»<sup>1</sup>

На данный момент веб-сайт – важная часть информационного и организационного сопровождения любого научного мероприятия. Проведение научной конференции или семинара подразумевает создание и поддержку веб-сайта, позволяющего автоматизировать задачи извещения и регистрации участников, приема и публикации тезисов, рецензирования статей и мн.др.

В данной работе рассматриваются подходы к созданию веб-ориентированной системы, позволяющей создавать и сопровождать веб-сайты научных мероприятий с типовым функционалом.

**Ключевые слова:** менеджмент науки, автоматизация, CMS.

© *B.V. Khabituev, F.V. Khandarov, E.G. Balakshiev, S.A. Nimaev*

### INFORMATION SYSTEM «CONFERENCE»

Nowadays website is an important part of informational and management supply of any scientific event. Holding conference or seminar requires creation and support of its web site, which allows to automate call-for papers and participants registration, submitting, collecting and publishing of theses, reviewing papers etc.

This article describes approaches to designing and creating a web-oriented system which allows to create and support web sites of scientific conferences with typical functionality.

**Keywords:** science management, automatization, CMS.

#### Введение

В настоящее время качественное и эффективное информационное сопровождение любого мероприятия подразумевает разработку интернет-сайта мероприятия. Организационное сопровождение научной конференции подразумевает выполнение ряда рутинных процедур, в том числе:

- составление и рассылку информационных писем;
- сбор регистрационной информации участников;
- представление тезисов, докладов и других материалов участников;
- рецензирование и публикацию материалов;
- хранение материалов прошедших конференций.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БГУ «Информационная система «Конференция»»

Создание информационной системы, автоматизирующей описанные процессы, очевидно, позволит повысить эффективность организационной работы, снимая часть рутинной нагрузки с исполнителей. Кроме того, немаловажным представляется объединение всех научных мероприятий в едином информационном портале с точки зрения унифицированного хранения и комфортного поиска информации, статистического учета и возможности проведения сравнительного анализа научных мероприятий вуза по различным показателям.

Стоит отметить, что создание подобной информационной системы – сложный итерационный процесс, требующий тщательного планирования уже на начальных этапах разработки [1]. В данной статье описываются основные требования, предъявляемые к разрабатываемой информационной системе, базовые модули системы и схема их взаимодействия.

### 1. Общие требования к системе

Разрабатываемую систему следует рассматривать как совокупность подсистем, интегрированных между собой, которые в полной мере реализуют процессы, связанные с созданием, сопровождением конференции и дальнейшим использованием в качестве составляющей части общей базы данных.

В соответствии с [2] сформулируем требования к функциональным возможностям разрабатываемой системы. Система должна обеспечивать:

- регистрацию и создание отдельного ресурса, посвященного конкретной конференции, с определением модераторов ресурса;
- регистрацию пользователей в созданных ресурсах в качестве участников мероприятий;
- личный кабинет пользователя для удобного взаимодействия с системой;
- рецензирование и отбор докладов;
- набор атрибутов-метаданных для конференций, докладов/статей, пользователей;
- гибкий поиск по данным конференций, учетным записям пользователей, опубликованным статьям;
- возможность оповещений о планируемых мероприятиях (рассылка через e-mail, личные кабинеты).

Учитывая современные методики проектирования сложных систем [3], необходимо предъявить следующие требования к проектированию и разработке подобной системы:

- изначально заложенный в структуру классов принцип итерационного развития системы;
- документирование кода;
- максимальная независимость от платформы;
- использование шаблонов проектирования для создания ортогонального кода [4].

## 2. Архитектура системы

Исходя из заявленных выше требований, разрабатываемая система должна включать в себя следующие модули (табл.)

Таблица

Название модуля	Описание
Регистрация/ авторизация	обеспечивает сквозную авторизацию на ресурсе с возможностью разграниченного доступа с определяемыми правами к различным разделам системы. Важнейшим требованием является гибкая реализация данного модуля, подразумевающая интеграцию с другими системами авторизаций.
Личный кабинет	предоставляет авторизованным пользователям функционал для работы с системой: <ul style="list-style-type: none"><li>- создание нового ресурса (сайта конференции);</li><li>- управление собственными ресурсами;</li><li>- регистрация на созданных ресурсах;</li><li>- доступ к системе документооборота.</li></ul>
Встроенная система документооборота	предоставляет возможности документооборота: <ul style="list-style-type: none"><li>- создание/получение рецензий на тезисы/доклады;</li><li>- создание/получение информационных писем;</li><li>- создание/получение сообщений о мероприятиях;</li><li>- создание тематических рассылок внутри системы/ по e-mail.</li></ul>
CMS сайта конференции	предоставляет пользователям функционал для работы с сайтами конференций. Уровни доступа к сайту: <ul style="list-style-type: none"><li>- администратор ресурса;</li><li>- модератор ресурса - наполнение;</li><li>- участник конференции.</li></ul> При создании нового ресурса подразумевается внедрение возможности кастомизации ресурса (выбор настроечных параметров ресурса).
Поиск	позволяет производить контекстный поиск по всему информационному пространству системы или по ее части (например, по конференциям определенной тематики или по определенному автору).
Ядро системы	осуществляет связь между всеми модулями системы. Объединяет данные различных конференций в едином информационном пространстве.

Взаимодействие модулей отображено на рисунке.

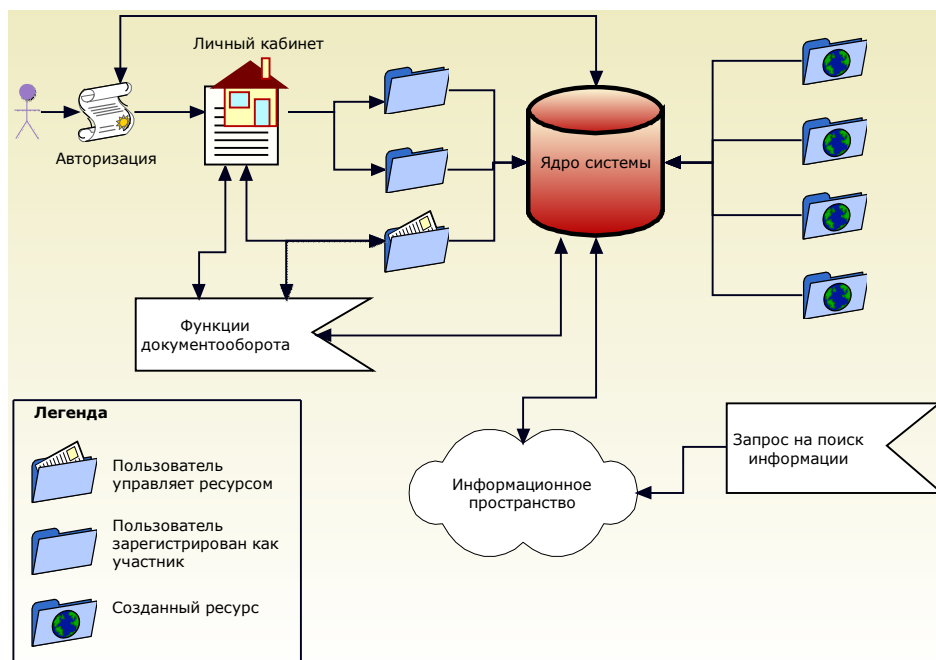


Рис. Взаимодействие модулей системы

### Заключение

Разработка описанной информационной системы представляет большой интерес в связи с предоставляемыми возможностями. Выработаны основные требования к разрабатываемой системе, описаны основные модули и схема их взаимодействия.

Информационная система будет реализована в виде веб-ресурса с использованием технологий PHP, MySQL, JavaScript, HTML, CSS. В качестве хостинговой платформы предполагается использовать веб-серверы Бурятского государственного университета.

### Литература

1. Акиншина Г.В., Быков Ю.В. Разработка методики проектирования защищённой веб-ориентированной информационной системы на примере системы дистанционного образования // Инфокоммуникационные технологии. – Самара: Изд-во Поволж. государственного университета телекоммуникаций и информатики, 2008 – С. 119-121
2. Гуськов А.Е., Васильков А.В. Средства поддержки проведения научных конференций: обзор и сравнение // Вестник Новосиб. гос. ун-та. Сер. Информационные технологии. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2010. – С. 35-45.



3. Ларман К. Применение UML 2.0 и шаблонов проектирования. Практическое руководство. – 3-е изд. – М., 2013. – 736 с.

4. Зандстра М. PHP: объекты, шаблоны и методы программирования. – 3-е изд. – М., 2011. – 560 с.

*Хабитуев Баир Викторович*, инженер Научно-образовательного и инновационного центра системных исследований и автоматизации, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, тел.: (3012)221215, e-mail: [bairinc0@gmail.com](mailto:bairinc0@gmail.com)

*Хандаров Федор Владимирович*, научный сотрудник Научно-образовательного и инновационного центра системных исследований и автоматизации, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, тел.: (3012)221215, e-mail: [fhandar@rambler.ru](mailto:fhandar@rambler.ru)

*Балакишев Эльдар Гюльмамедович*, студент Института математики и информатики Бурятского государственного университета, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, тел.: (908)5994300, e-mail: [locust\\_king@mail.ru](mailto:locust_king@mail.ru)

*Нимаев Сергей Андреевич*, студент ИМИ БГУ, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, тел.: +7 914 8310062, e-mail: [nekjine@gmail.com](mailto:nekjine@gmail.com)

*Khabituev Bair Victorovich*, software engineer, Scientific and Educational Centre of System Research and Automatization, 670000, Ulan-Ude, Smolin str., 24a, ph.: (3012)221215, e-mail: [bairinc0@gmail.com](mailto:bairinc0@gmail.com)

*Khandarov Fedor Vladimirovich*, research associate, Scientific and Educational Centre of System Research and Automatization, 670000, Ulan-Ude, Smolin str., 24a, ph.: (3012)221215, e-mail: [fhandar@rambler.ru](mailto:fhandar@rambler.ru)

*Balakshiev Eldar Guilmamedovich*, undergraduate student, Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, 670000, Ulan-Ude, Smolin str., 24a, ph.: (908)5994300, e-mail: [locust\\_king@mail.ru](mailto:locust_king@mail.ru)

*Nimaev Sergey Andreevich*, undergraduate student, Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, 670000, Ulan-Ude, Smolin str., 24am ph.: +7 914 8310062, e-mail: [nekjine@gmail.com](mailto:nekjine@gmail.com)

### 3. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

УДК 517.946

© *В.В. Кибирев*

#### ЗАДАЧА КОШИ В ЦЕЛОМ ДЛЯ БИЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ГОЛОМОРФНОСТИ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В данной работе доказаны две теоремы о решении задачи Коши в целом для одного специального класса уравнений за счет того, что уравнение рассматривается в комплексной области.

**Ключевые слова:** задача Коши, голоморфные функции, бицилиндрическая область, аналитические коэффициенты.

© *V.V. Kibirev*

#### CAUCHY PROBLEM ON THE WHOLE FOR BICYLINDRICAL DOMAIN OF INITIAL DATA HOLOMORPHY

In the article two theorems have been proved, they concern the solution of Cauchy problem on the whole for one special class of equations due to the fact that the equation is considered in the complex domain.

**Keywords:** Cauchy problem, holomorphic functions, bicylindrical domain, analytic coefficients.

#### Введение

Классическая теорема Коши-Ковалевской дает существование и единственность решения задачи Коши для дифференциального уравнения с частными производными с аналитическими коэффициентами. Однако существование решения гарантируется только в малом. Здесь будет изучаться задача Коши для одного узкого класса уравнений, но решение будет получено в целом. Решение в целом получается за счет того, что уравнение рассматривается в комплексном пространстве.

#### Постановка задачи

Будем рассматривать задачу Коши в следующей постановке: найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sum_{j,l=1}^m A_{jl}(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_l} = 0 \quad (\alpha)$$

(где  $A_{jl}$  – аналитические функции, принимающие вещественные значения при вещественных значениях независимых переменных), удовлетворяющее условиям

$$u|_{z=0} = f(x_1, \dots, x_m), \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = g(x_1, \dots, x_m) \quad (\beta)$$

где  $f$  и  $g$  – функции, голоморфные в некоторой области голоморфности  $B$ , причем при вещественных значениях  $z, x_1, \dots, x_m$  уравнение (а) эллиплично.

Возьмем в качестве области  $B$ , области голоморфности функций  $u$  и  $v$ , бицилиндрическую область  $D = D_1 \cdot D_2$ , где  $D_1$  – область в  $\xi$ -плоскости с гладкой границей  $\Gamma_1$ ;  $D_2$  – область в  $\eta$ -плоскости с гладкой границей  $\Gamma_2$ . Всякую функцию, голоморфную в  $D$  и непрерывную в замкнутой области  $D$ , можно представить следующим образом:

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{u(t, \tau) dt d\tau}{(t - \xi)(\tau - \eta)}. \quad (1)$$

Поменяв порядок суммирования и интегрирования, получим

$$g(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{u(t, \tau)}{(t - \xi)(\tau - \eta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \left[ -\frac{\zeta^2}{(t - \xi)(\tau - \eta)} \right]^n dt d\tau$$

аналогично будем иметь

$$h(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{\zeta v(t, \tau)}{(t - \xi)(\tau - \eta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n+1)!} \left[ -\frac{\zeta^2}{(t - \xi)(\tau - \eta)} \right]^n dt d\tau$$

Рассмотрим ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n v^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} 4^n v^n$ . Воспользовав-

шись формулой удвоения для гамма-функции, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(n+1)]^2}{\Gamma(2n+1)!} 4^n v^n &= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(n+1)]^2}{4^n \Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(n+1)} 4^n v^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) [\Gamma(n+1)]^2}{n! \Gamma(n + \frac{1}{2})} v^n = F(1, 1; \frac{3}{2}; v), \end{aligned}$$

где  $F(\alpha, \beta, \gamma, v)$  – гипергеометрическая функция Гаусса.

И аналогично:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} 4^n v^n = F(1, 1; \frac{3}{2}; v).$$

Таким образом, решение задачи Коши в случае, когда начальные данные голоморфны в бицилиндрической области  $D$  и непрерывны в замкнутой области  $\bar{D}$ , запишется следующим образом:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} \left\{ \frac{u(t, \tau)}{(t-\xi)(\tau-\eta)} F\left(1, 1; \frac{1}{2}; -\frac{\zeta^2}{(t-\xi)(\tau-\eta)}\right) + \frac{\zeta v(t, \tau)}{(t-\xi)(\tau-\eta)} F\left(1, 1; \frac{3}{2}; -\frac{\zeta^2}{(t-\xi)(\tau-\eta)}\right) \right\} dt d\tau. \quad (2)$$

**Основные теоремы**

**Теорема 1.** *Существует область голоморфности  $G(D)$  из пространства  $S^3$ , такая, что каковы бы ни были начальные данные  $u$  и  $v$ , голоморфные в бицилиндрической области  $D$  и непрерывные в замкнутой области  $\bar{D}$ , решение задачи Коши  $f$  голоморфно в области  $G(D)$ . Если начальные данные аналитически продолжимы из  $D$ , то решение задачи Коши аналитически продолжимо из области  $G(D)$ . Для каждой точки  $X$  границы области  $G(D)$  существует гармоническая функция, голоморфная в  $G(D)$ , удовлетворяющая начальным данным, голоморфным в  $D$ , и имеющая особенность в точке  $X$ .*

**Доказательство.** Из представления (2) решения задачи Коши  $f(\xi, \eta, \zeta)$  следует, что  $f(\xi, \eta, \zeta)$  голоморфна там, где голоморфны функции

$$F\left(1, 1; \frac{1}{2}; -\frac{\zeta^2}{(t-\xi)(\tau-\eta)}\right), \quad F\left(1, 1; \frac{3}{2}; -\frac{\zeta^2}{(t-\xi)(\tau-\eta)}\right).$$

Особенности этих функций располагаются на поверхности

$$P_{\tau} : \left\{ -\frac{\zeta^2}{(t-\xi)(\tau-\eta)} = 1 \right\}.$$

Рассмотрим множество  $Q = \bigcup_{(t, \tau) \in \Gamma_1 \cdot \Gamma_2} P_{\tau}$ . Область  $G(D)$  является связной компонентой дополнения  $SQ$  множества  $Q$  до всего пространства  $S^3$ . Покажем, что  $G(D)$  – область голоморфности. Гипергеометрическая функция  $f(\alpha, \beta, \gamma, \nu)$  голоморфна в плоскости с разрезом по лучу  $1 \leq \nu < \infty$ , следовательно, функции

$$F\left(1, 1; \frac{1}{2}; -\frac{\zeta^2}{(t-\xi)(\tau-\eta)}\right), \quad F\left(1, 1; \frac{3}{2}; -\frac{\zeta^2}{(t-\xi)(\tau-\eta)}\right)$$

голоморфны в пространстве  $S^3$  с выброшенной гиперповерхностью  $1 \leq \xi^2(t-\xi)^{-1}(\tau-\eta) < \infty$ .

Обозначим эту область  $R$ . Область  $R$  будет областью голоморфности, так как плоскость с разрезом по лучу является областью голоморфности некоторой функции  $q(z)$  одного комплексного переменного  $z$ . Таким образом,  $G(D)$  – связная компонента пересечения областей голоморфности и содержит некоторое открытое связанное множество, содержащееся в  $V(D)$ . Значит,  $G(D)$  будет областью голоморфности.

Граница области  $G(D)$  содержится в множестве  $Q$ , следовательно, для каждой точки  $X$  границы области  $G(D)$  найдется хотя бы одна поверх-

ность  $P_{\tau}$ , содержащая эту точку. Функция

$$(t - \xi)^{-1}(\tau - \eta)^{-1} F\left(1, 1; \frac{1}{2}; -\frac{\xi^2}{(t - \xi)(\tau - \eta)}\right)$$

является решением задачи Коши с начальными данными, голоморфными в  $D$ , а сама она голоморфна в  $G(D)$  и в точке  $X$  имеет особенность. Третье утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение доказывается очень просто. Область  $G(D)$  пересекается с пространством  $C^2 : \{\xi = 0\}$  по области  $D$ , поэтому если начальные данные голоморфны в более широкой области  $B \supset D$ , то  $V(B)$  содержит точки, не принадлежащие  $V(D)$ , а  $G(B)$  содержит точки, не принадлежащие  $G(D)$ , и т.д.

Далее будем рассматривать пересечение области  $G(D)$  с многообразием  $\eta = \bar{\xi}$ ,  $lm z = 0$ , на котором переменные  $x$ ,  $y$ , и  $z$  вещественны. Для этого наложим ряд ограничений на область  $D$ . Области  $D_1$  и  $D_2$  будем считать симметричными относительно прямых  $\xi = \bar{\xi}$  и  $\eta = \bar{\eta}$  соответственно. Кроме того, будем предполагать, что при совмещении плоскостей  $\xi$  и  $\eta$  области  $D_1$  и  $D_2$  имеют непустое связное пересечение. Это значит, что пересечение бицилиндрической области  $D$  с многообразием  $\xi = \bar{\eta}$  не пусто. В переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  это означает, что в пересечении  $D_0 = D_1 \cap D_2$ , лежащем в плоскости  $z=0$ , заданы условия задачи Коши, причем эти заданные функции аналитически продолжаются в бицилиндрическую область  $D$ .

Обозначим через  $H(D)$  такую область трехмерного вещественного пространства  $R^3$ , которая содержит в качестве подмножества плоскую область  $D_0$  и является связной компонентой пересечения области  $G(D)$  с вещественным пространством  $R^3 : \{lmx = lmy = lmz = 0\}$ , вложенным в  $C^3$ . Очевидно, что область  $H(D)$  содержится в прямом произведении области  $D_0$  и оси  $Oz$ . Каждой точке границы области  $D_0$  соответствует точка  $t$  границы области  $D_1$  либо точка  $\tau = \bar{t}$  границы области  $P_2$ , а функция  $f = (t - \xi)^{-1}$  (соответственно  $f = (\tau - \eta)^{-1}$ ) голоморфна в  $D$ , удовлетворяет уравнению Лапласа и на прямой  $x + iy = t$  (соответственно  $x - iy = \tau$ ) имеет особенность. Функция  $f$  в формуле (2) голоморфна всюду там, где голоморфны гипергеометрические функции, входящие в формулу (2), а особенности этих функций лежат на поверхностях

$$z^2 + (t - \xi)(\tau - \eta) = 0. \quad (3)$$

Следовательно, в  $H(D)$  не должна попасть ни одна точка, лежащая на этих поверхностях.

Пусть  $t = a + ib$ ,  $\tau = \alpha + i\beta$ , тогда пересечение соответствующей поверхности (3) с пространством  $R^3$  вещественных переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  задается уравнением  $z^2 + [x - a + i(y - b)][x - \alpha - i(y - \beta)] = 0$ , которое эквивалентно двум вещественным уравнениям

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{a + \alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b - \beta}{2}\right)^2 + z^2 &= \left(\frac{a - \alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{b + \beta}{2}\right)^2, \\ (b + \beta)\left(x - \frac{a - \alpha}{2}\right) - (a - \alpha)\left(y - \frac{b - \beta}{2}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) представляет окружность  $K$ , лежащую в плоскости, параллельной оси  $Oz$  и проходящую через точки  $(a, b, 0)$  и  $(\alpha, -\beta, 0)$ .

Для каждой точки  $t \in \Gamma_1$  построим поверхность  $S(t)$ , заполняемую окружностями (4), следующим образом. Рассмотрим область  $D_2^*$ , симметричную области  $D_2$  относительно оси  $Ox$ . Каждую точку  $\tau^*$  границы  $\Gamma_2$  области  $D_2^*$  соединим отрезком прямой с точкой  $t$ . На этом отрезке, как на диаметре в плоскости, перпендикулярной плоскости  $xOy$ , построим окружность  $K(\tau^*)$ .

Множество  $S(t) = \bigcup_{\tau^* \in \Gamma_2^*} K(\tau^*)$  будем называть сопутствующей поверхностью точки  $t$ . Так как  $\Gamma_2^*$  является кусочно-гладкой кривой,  $S(t)$  с выброшенной точкой  $t$  – кусочно-гладкая поверхность. Поверхность  $S(t)$  замкнута и разбивает пространство  $R^3$  на две части. Ту часть пространства  $R^3$ , в которой содержится множество  $D_2^*$ , обозначим  $\Sigma(t)$  и будем называть ее присоединенной областью точки  $t$ .

Аналогично строится сопутствующая поверхность и присоединенная область для любой точки  $\tau \in \Gamma_2$ , только теперь вместо области  $D_2^*$  рассматривается область  $D_1^*$ , симметричная области  $D_1$  относительно оси  $Ox$ . Очевидно, что та часть пересечения всех присоединенных областей, в которой содержится множество  $D_0$ , и является областью  $H(D)$ .

Из структуры области  $H(D)$  вытекает простой способ ее построения в некоторых специальных случаях. Пусть области  $D_1$  и  $D_2$  совпадают и область  $D_1$  симметрична относительно оси  $Ox$ . Рассмотрим точку  $P \in D_1$  и предположим, что  $D_1$  ограничивается простой замкнутой линией  $\Gamma_1$ , т.е.  $D_1$  односвязна. Через точку  $P$  проведем хорду  $L(P)$  кривой  $\Gamma_1$ . На этой хорде, как на диаметре в плоскости, параллельной оси  $Oz$ , построим полуокружность в полупространстве  $z > 0$ . Эта полуокружность лежит на сопутствующих поверхностях концов хорды, а полукруг, ограничиваемый хордой и этой полуокружностью, принадлежит присоединенным областям концов хорды. Длина содержащегося в построенном выше полукруге отрезка прямой, параллельной оси  $Oz$  и проходящей через точку  $P$ , равна произведению длин отрезков хорды кривой  $\Gamma_1$ , на которые она делится точкой  $P$ . Если рассмотреть всевозможные хорды кривой  $\Gamma_1$ , проходящие через точку  $P$ , и построить на каждой из этих хорд, как на диаметре, полукруг, лежащий в плоскости, параллельной оси  $Oz$ , в полупространстве  $z > 0$ , то пересечение области  $H(D)$  с полупрямой  $T(P)$ , параллельной оси  $Oz$  и выходящей из точки  $P$ , лежащей в полупространстве  $z > 0$ , совпадет с

пересечением всех построенных выше полукругов. Отсюда следует простой способ вычисления длины отрезка  $T(P) \cap H(D)$ . Через точку  $P$  проведем всевозможные хорды кривой  $\Gamma_1$  и рассмотрим произведение длин отрезков хорды, на которые делит ее точка  $P$ . Минимум этого произведения и есть длина отрезка  $T(P) \cap H(D)$ .

Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть начальные данные задачи Коши для уравнения Лапласа голоморфны в бицилиндрической области  $D = D_1 \cdot D_1'$ , где  $D_1$  – односвязная с кусочно-гладкой границей  $\Gamma_1$ , симметричная относительно оси  $\text{Im} \xi = 0$  область из плоскости переменного  $\xi$ , а  $D_1'$  – та же область  $D_1$ , лежащая в плоскости переменного  $\eta$ . Тогда граница области  $H(D)$  задается уравнением  $z^2 = Q_m(P)$ ,  $P \in D$ , где функция  $Q_m$  определяется следующим образом: плоскости  $\xi$  и  $\eta$  совмещаются с плоскостью  $xOy$  пространства  $R^3$ , через каждую точку  $P \in D_1$  проводятся всевозможные хорды кривой  $\Gamma_1$ , рассматриваются произведения длин отрезков хорды, на которые ее делит точка  $P$ , а затем берется минимум этого произведения по всем хордам, проходящим через точку  $P$ .

### Заключение

Итак, в данной работе получено решение задачи Коши в целом для некоторого класса уравнений за счет того, что уравнение рассматривается в комплексной области.

При выводе формулы (2) использовалось представление начальных данных задачи Коши интегральной формулой Коши. Если вместо интегральной формулы Коши воспользоваться формулой Бохнера-Мартинелли, то полученные результаты можно обобщить.

### Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 204 с.
2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.
3. Фукс Б.А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1962. – 420 с.
4. Янушаускас А. К задаче Коши для уравнения Лапласа с тремя независимыми переменными // Сиб. матем. журнал. – 1975. – Т.16. №6. – С. 1352-1363.
5. Янушаускас А. К теории вырождающихся эллиптических уравнений // Сиб. матем. журнал. – 1974. – Т.15. №6. – С. 1394-1405.

*Кибирев Владимир Васильевич*, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел.: 8(301-2)217573, e-mail: [dekanat\\_imi@bsu.ru](mailto:dekanat_imi@bsu.ru)

*Kibirev Vladimir Vasilievich*, candidate of physical and mathematical sciences, professor, applied mathematics department, Buryat State University, e-mail: [dekanat\\_imi@bsu.ru](mailto:dekanat_imi@bsu.ru).



УДК 519.62

© *В. Улзыбаяр*

## **ТОЧНЫЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ**

Предлагается лучшая конечно-разностная схема для волнового уравнения. Разработан метод решения полученной конечно-разностной схемы. Волновое уравнение применяется для решения физических и экономических задач. Эффективность и точность метода были проверены на нескольких примерах.

**Ключевые слова:** лучшая конечно-разностная схема, волновое уравнение, краевая задача, начальная задача.

© *V. Ulziibayar*

## **EXACT FINITE DIFFERENCE SCHEMES FOR SOLVING WAVE EQUATION**

The best finite-difference scheme for the Wave equation is suggested. A method of solving obtained finite-difference scheme is developed. The Wave equation is applied to physical and economic problems. The efficiency and accuracy of method were tested on several examples.

**Keywords:** the best finite-difference scheme, wave equation, boundary value problem, initial value problem.

### **Introduction**

The finite-difference method is a standard numerical method for solving initial and boundary value problems. Recently, considerable attention has been attracted to construct a best (or exact) difference approximation for some ordinary and partial differential equations [1, 2, and 3]. In this paper an best finite-difference method is developed for Wave equation with initial value and general boundary conditions on the rectangular domain in  $R^2$ . The method proposed here comes out from [4] and is based on separation of variables method and expansion of one-dimensional three-point difference operators for sufficiently smooth solution. The paper is organized as follows. The statement of problem and the separation of variables method are considered in section 2. A detailed description of the best difference approximation to the Wave equation in rectangular domain is given in section 3. Section 4 is devoted to derive the best approximation for the given initial and third kind boundary conditions. The method of solution for the obtained difference equations is considered in section 5.

**1. Statement of problem**

Let  $\Omega = (0, l) \times (0, +\infty)$  be an open rectangular domain in Euclidean  $R^2$  space with boundary given by  $\partial\Omega$ . The aim is to determine a function  $u(x, t)$  satisfying equation

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega \tag{2.1}$$

with boundary condition:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(0, t) - \beta_1 u'(0, t) &= \gamma_1(t) \\ \alpha_2 u(l, t) + \beta_2 u'(l, t) &= \gamma_2(t) \end{aligned} \quad t(0, +\infty), \tag{2.2a}$$

with Initial condition:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad x \in (0, l) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x), \quad x \in (0, l) \end{aligned} \tag{2.2b}$$

where  $c^2$  in (2.1) is a given number and  $\frac{\partial}{\partial n}$  is the outward normal on  $\partial\Omega$ .

It is well known that the stabilized oscillation problems and diffusing processes in gas lead to the so called Wave equation (2.1) with a positive coefficient. We will assume that the problem (2.1), (2.2a), (2.2b) has an unique and sufficiently smooth solution.

By virtue of variables method looking for the solution  $u(x, y)$  of Eq. (2.1), (2.2a), (2.2b) in the form

$$u(x, t) = U_1(x) U_2(t) \tag{2.3}$$

we arrive at equation

$$c^2 \frac{U''_1(x)}{U_1(x)} - \frac{U''_2(t)}{U_2(t)} = 0$$

which is splitted into two independing equations

$$U''_1(x) = \omega U_1(x) \tag{2.4a}$$

and

$$U''_2(t) = \beta U_2(t), \quad \beta = c^2 \omega, \tag{2.4b}$$

where the unknown separation constant  $\omega$  is to be found.

By virtue of (2.3) the boundary condition (2.2a) is splitted into ones for  $U_1(x)$  and  $U_2(y)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 U_1(0) - \beta_1 U'_1(0) &= x_{10}, \\ \alpha_2 U_1(l) + \beta_2 U'_1(l) &= x_{2N} \end{aligned} \tag{2.5}$$

and Initial condition (2.2b)

$$U_2(0) = x_{30}, \quad U'_2(0) = x_{4M} \tag{2.6}$$

The solution of boundary value problem (2.4a), (2.5) is founded in a closed form

$$U_1(x) = \frac{x_{10} F_1(\omega) + x_{2N} F_2(\omega)}{F_3(\omega) + \sqrt{\omega} F_4(\omega)}, \tag{2.7}$$

where

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \alpha_2 \operatorname{sh}(\sqrt{\omega}(1-x)) + \beta_2 \sqrt{\omega} \operatorname{ch}(\sqrt{\omega}(1-x)), \\ F_2(\omega) &= \alpha_1 \operatorname{sh}(\sqrt{\omega}x) + \beta_1 \sqrt{\omega} \operatorname{ch}(\sqrt{\omega}x), \quad \omega > 0 \\ \text{and} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(\omega) &= (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) \operatorname{sh}(\sqrt{\omega}), \\ F_4(\omega) &= (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \operatorname{ch}(\sqrt{\omega}). \quad \omega > 0 \end{aligned}$$

When  $\omega < 0$  the functions  $\operatorname{sh}$  and  $\operatorname{ch}$  in (2.7) are to be replaced by  $\sin$  and  $\cos$  respectively and  $\omega$  replaced by  $-\omega$ . Analogously, we can find the solutions of boundary value problem (2.4b) and (2.6) in closed form. Then from (2.3) and (2.7) clear, that the problem consists in determining the separation constant  $\omega$ .

## 2. Construction of the best finite-difference equations

For the numerical solution of problem (2.1), (2.2) is introduced the uniform rectangular grid  $\Omega_h$ :

$\Omega_h = \{(x_i, t_j) \mid x_i = x_0 + ih_1; \quad t = t_0 + jh_2; \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots, M\}$   
where  $h_1 = \frac{1}{N}$  and  $h_2$  is arbitrary mesh sizes in the  $x$  and  $t$  directions respectively. Usually, the Eq.(2.1) is approximated by the five-point difference equation

$$\begin{aligned} c^2 \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,i}}{h_1^2} - \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_2^2} \\ = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, M - 1.$

The local discretization error of the Eq.(3.1) is of  $O(h_1^2 + h_2^2)$  order. Now we describe how to derive the best difference scheme for Eq.(2.1). To this end, we consider expression

$$\begin{aligned} (c^2 \Lambda_1 - \Lambda_2) u_{ij} \\ = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,i}}{h_1^2} \\ - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

where  $u_{ij} = u(x_i, t_j)$ . If we denote by  $U_{1i}, U_{2i}$  the values of  $U_{1i}, U_{2j}$  the values of  $U_1(x_i)$  and  $U_2(t_j)$  respectively, the using (2.3) the Eq.(3.2) may be written as

$$\begin{aligned} (c^2 \Lambda_1 - \Lambda_2) u_{ij} &= c^2 U_{2j} \Lambda_1 U_{1i} \\ &- U_{1i} \Lambda_2 U_{2j}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Due to smoothness assumption of solution  $u(x, t)$ , as well as, functions  $U_1(x)$  and  $U_2(t)$ , the Taylor series expansion yields

$$\Lambda_1 U_{1i} = U''_1(x_i) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_1^{2k} U_1^{2k+2}(x_i)}{(2k+2)!}, \quad (3.4a)$$

$$\Lambda_2 U_{2j} = U''_2(t_j) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_2^{2k} U_2^{2k+2}(t_j)}{(2k+2)!} \tag{3.4b}$$

Because of (2.4) we have

$$U_1^{(2k)} = \omega^k U_1, U_2^{(2k)} = \beta^k U_2, \quad k = 1, 2, \dots \tag{3.5}$$

Taking into account (3.4), (3.5) in (3.3) it follows that

$$\left\{ c^2 \Lambda_1 - \Lambda_2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^2 h_1^{2k} \omega^{k+1} - h_2^{2k} \beta^{k+1}}{(2k+2)!} \right\} E u_{ij} = 0, \tag{3.6}$$

$i = 1, 2, \dots, N - 1; j = 1, 2, \dots, M - 1,$

where  $E$  is unit operator. The difference equation (3.6) contains unknown nonzero parameter  $\omega$  and therefore it may be considered as a nonlinear equation with respect to the parameter  $\omega$  and  $u_{ij}$ . The series in (3.6) may be expressed through analytical functions depending on the sign of quantities  $\omega$  and  $\beta$  and thereby the Eq. (3.6) can be rewritten as

$$(c^2 \Lambda_1 - \Lambda_2 - 2D(\omega)E)u = 0, \quad (x, t) \in \Omega_h. \tag{3.7}$$

There are two cases:

1. Let  $\omega < 0$ . Then it is easy to show that

$$D = \frac{\cos(h_1 \sqrt{-\omega}) - \frac{\omega h_1^2}{2} - 1}{h_1^2} - \frac{\cos(h_2 \sqrt{-\beta}) - \frac{\beta h_2^2}{2} - 1}{h_2^2} \tag{3.8}$$

2. Let  $\omega > 0$ . In this case  $D$  is given by

$$D = \frac{\text{ch}(\sqrt{\omega} h_1) - \frac{\omega h_1^2}{2} - 1}{h_1^2} - \frac{\text{ch}(\sqrt{\beta} h_2) - \frac{\beta h_2^2}{2} - 1}{h_2^2} \tag{3.9}$$

Thus we obtain the best (or exact) five-point difference equations (3.7) for the equation (2.1) (see, for example, Mickens [2] and Agarwal [1]). The function  $D(\omega)$  in (3.7) can be presented as a sum of two ones, i. e.,

$$D(\omega) = D_1(\omega) - D_2(\omega), \tag{3.10}$$

where  $D_1(\omega)$  and  $D_2(\omega)$  correspond to the first and second terms in (3.8) and (3.9) respectively.

### 3. The best finite-difference initial and boundary conditions

Now we will derive a best difference boundary condition for (2.5), (2.6). Using (2.4) in the Taylor series expansion

$$U_{11} = U_{10} + h_1 U'_{10} + \frac{h_1^2}{2!} U''_{10} + \frac{h_1^3}{3!} U'''_{10} + \dots$$

we obtain

$$U_{11} = \begin{cases} \text{ch}(\sqrt{\omega}h_1)U_{10} + \frac{\text{sh}(\sqrt{\omega}h_1)}{\sqrt{\omega}}U'_{10}, & \omega > 0 \\ \cos(\sqrt{-\omega}h_1)U_{10} + \frac{\sin(\sqrt{-\omega}h_1)}{\sqrt{-\omega}}U'_{10}, & \omega < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

If  $\beta_1 = 0$  in (2.5), then we have

$$U_{10} = \frac{x_{10}}{\alpha_1} \quad (4.2a)$$

If  $\beta_1 \neq 0$ , then finding  $U'_{10}$  from (2.5) and substituting it in (4.1) we get

$$U_{11} = \theta_1(\omega)U_{10} + \theta_2(\omega), \quad (4.2b)$$

where  $\theta_1(\omega)$  and  $\theta_2(\omega)$  are given by

$$\theta_1(\omega) = \begin{cases} \text{ch}(\sqrt{\omega}h_1) + \frac{\alpha_1 \text{sh}(\sqrt{\omega}h_1)}{\beta_1 \sqrt{\omega}}, & \omega > 0 \\ \cos(\sqrt{-\omega}h_1) + \frac{\alpha_1 \sin(\sqrt{-\omega}h_1)}{\beta_1 \sqrt{-\omega}}, & \omega < 0 \end{cases} \quad (4.3a)$$

and

$$\theta_2(\omega) = \begin{cases} -\frac{x_{10} \text{sh}(\sqrt{\omega}h_1)}{\beta_1 \sqrt{\omega}}, & \omega > 0 \\ -\frac{x_{10} \sin(\sqrt{-\omega}h_1)}{\beta_1 \sqrt{-\omega}}, & \omega < 0 \end{cases} \quad (4.3b)$$

Analogously, it is easy to verify that the exact difference boundary condition for  $U_1(x)$  at point  $x = b$  is given by

$$U_{1N} = \frac{X_{2N}}{\alpha_2},$$

when

$$\beta_2 = 0, \quad (4.4a)$$

$$U_{1N-1} = \theta_3(\omega)U_{1N} + \theta_4(\omega),$$

when

$$\beta_2 \neq 0, \quad (4.4b)$$

where  $\theta_3(\omega)$  and  $\theta_4(\omega)$  are given by

$$\theta_3(\omega) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{\omega}h_1) + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\omega}h_1)}{\sqrt{\omega}} \omega > 0 \\ \cos(\sqrt{-\omega}h_1) + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \frac{\sin(\sqrt{-\omega}h_1)}{\sqrt{-\omega}} \omega < 0 \end{cases} \quad (4.5a)$$

and

$$\theta_4(\omega) = \begin{cases} -\frac{x_{2N}}{\beta_2} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\omega}h_1)}{\sqrt{\omega}} \omega > 0 \\ -\frac{x_{2N}}{\beta_2} \frac{\sin(\sqrt{-\omega}h_1)}{\sqrt{-\omega}} \omega < 0 \end{cases} \quad (4.5b)$$

In the same way, as before, one can construct the best difference initial condition for  $U_2(t)$ . We omit the evaluation and present only the final results:

$$U_{20} = x_{30} \quad (4.6a)$$

and

$$U_{21} = \bar{\theta}_1(\beta)x_{30} + \bar{\theta}_2(\beta)x_{4M} \quad (4.6b)$$

where  $\bar{\theta}_i(\omega)$  are defined by

$$\bar{\theta}_1(\omega) = \begin{cases} \cos(\sqrt{-\beta}h_2), & \beta < 0 \\ \operatorname{ch}(\sqrt{\beta}h_2), & \beta > 0 \end{cases} \quad (4.7a)$$

$$\bar{\theta}_2(\omega) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{-\beta}h_2)}{\sqrt{-\beta}}, & \beta < 0 \\ \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\beta}h_2)}{\sqrt{\beta}}, & \beta > 0 \end{cases} \quad (4.7b)$$

### 5. Method for solution of finite-difference equations

In this section we consider a method for solving the finite-difference equations (3.7). For this purpose we rewrite it in the form

$$c^2 U_{2j}(\Lambda_1 - 2D_1(\omega)E)U_{1i} - U_{1i}(\Lambda_2 - 2D_2(\omega)E)U_{2j} = 0, \quad (5.1)$$

$$i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, M - 1,$$

in which we have used (3.11). From this it is clear, that Eq. (5.1) will be fulfilled if we choose  $U_{1i}$  and  $U_{2j}$  such that

$$(\Lambda_1 - 2D_1(\omega)E)U_{1i} = 0, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (5.2a)$$

$$(\Lambda_2 - 2D_2(\omega)E)U_{2i} = 0, \quad j = 1, \dots, M - 1. \quad (5.2b)$$

The last weakly coupled system of Eq. (5.2) is splitted into two equations with corresponding boundary conditions. First, we consider the Eq. (5.2a) subject to boundary conditions (4.2) and (4.4).

According to (2.1), (2.2) and (2.3) the function  $U_1(x)$  will be determined within an arbitrary multiplicative constant. Therefore the three-point finite-difference equations (5.2a) can be solved by shooting method starting with  $U_{10}^0, U_{11}^0$  and  $\omega_0$  which are required to be known. Thanks to (4.2) it is possible to find  $U_{10}$  or  $U_{11}$  depending on the  $\beta_1$ . For example, if  $\beta_1 = 0$  then  $U_{10}$  is determined by (4.2a) and  $U_{11}$  and  $\omega$  to be chosen arbitrary. Otherwise,  $U_{11}$  is determined by (4.2b) and  $U_{10}$  and  $\omega$  to be chosen arbitrary.

The exact value of parameter  $\omega$  must satisfy

$$\Phi(\omega) = 0, \quad (5.3)$$

where  $\Phi(\omega)$ , for examples, when  $\chi_{10} = 0$  defined by

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} U_{1N} - \frac{1}{\alpha_2} \chi_{2N}, & \text{when } \beta_2 = 0 \\ U_{1,N-1} - \theta_3(\omega)U_{1N} - \theta_4(\omega), & \text{when } \beta_2 \neq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

The nonlinear equation (5.3) can be solved by Newton's method:

$$\omega_{k+1} = \omega_k - \frac{\Phi(\omega_k)}{\Phi'(\omega_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

The value  $\Phi'(\omega_k)$  in the dominator of (5.5) is found by differentiating the Eq. (5.4) and (5.2a) with respect to  $\omega$ . The iteration process (5.5) is terminated by criterion

$$|\omega_{k+1} - \omega_k| \leq \mathcal{E}, \quad (5.6)$$

where  $\mathcal{E}$  is a reassigned accuracy.

If the evaluation of  $\Phi'(\omega)$  causes some difficulty we can use secant method instead of Newton's ones. After finding  $\omega$  the three-point difference equations (5.2b) with boundary conditions (4.6), (4.7) can be solved by elimination method. We have tested the efficiency and accuracy of finite-difference scheme on the several examples by using MaTlab program.

### References

1. Agarwal R.P., Difference equations and inequalities, Theory, methods and Applications, Mareel Dekker, New York, 1992.
2. Batgerel B. and Zhanlav T., An exact finite difference scheme for Sturm Liouville problems, Sc.Transation NUM, 1(120), 1996.
3. Mickens R.E., Nonstandard finite-difference models of differential equations, World Scientific, Singapore, 1994.
4. Samarskii A.A., Theory of difference equations, M. Nauka, 1977.
5. Zhanlav.T and Ulziibayar.V. The Best Finite Difference Scheme for the Helmholtz Equation // American Journal of Computational Mathematics. Vol. 3. USA. 2012.

6. Ulziibayar.V. The Best Finite – Difference Scheme for the Wave Equation // American Journal of Mathematics and Sciences. Vol.2, No.1. Mind Reader Publications, New Delhi, India, 2013.

*Улзыбаяр Ванданду*, научный сотрудник Института Математики, Монгольский университет науки и технологий, e-mail: [v\\_ulzii@yahoo.com](mailto:v_ulzii@yahoo.com)

*Ulziibayar Vandandoo*, researcher of School of Mathematics, Mongolian University of Science and Technology, e-mail: [v\\_ulzii@yahoo.com](mailto:v_ulzii@yahoo.com)



УДК 517.948

© Г.А. Шишкин

### **КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

В статье на основе использования функции гибкой структуры исследуется возможность решения краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с функциональными запаздываниями.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра, разрешающие уравнения, функция гибкой структуры, функциональные запаздывания.

© G.A. Shishkin

### **BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR VOLTERRA INTEGER-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FUNCTIONAL DELAY**

In the article a possibility of solution of boundary value problem for Volterra integer-differential equations with functional delays is researched on the basis of the use flexible structure function.

**Keywords:** Volterra integer-differential equations, resolving equations, function of flexible structure, functional delays.

#### **Введение**

В работах [4] и [5] проведено исследование возможностей преобразования начальных задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и Вольтерра с запаздывающим аргументом с помощью функции гибкой структуры к интегральным уравнениям с обыкновенным аргументом. Доказано, что задача Коши для всех интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и Вольтерра с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры преобразуется к разрешающему интегральному уравнению с обыкновенным аргументом, решение которых существует (и притом единственное) при выполнении условий ограниченности функций, входящих в уравнение. Рассмотрены возможности решения в замкнутом виде и вариант приближенного решения, если точное решение найти затруднительно. Определение типов в этой работе, как и в следующих, осуществлялось в соответствии с классификацией, приведенной в работе [1].

В данной работе исследуем вопрос о возможности аналогичных преобразований линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом.

**Постановка краевой задачи**

Выпишем общий вид линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом

$$\sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^n [f_{ij}(x)y^{(i)}(u_j(x)) + \lambda \int_a^x K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(u_j(\eta))d\eta] = f(x), \quad (1)$$

где  $u_0(x) \equiv x$ ,  $u_j(x) \leq x$ ,  $u_j(x) \not\equiv x$ ,  $j = \overline{1, l}$ ,  $f_{ij}(x)$ ,  $f(x)$  и  $u_j(x)$  – непрерывны, ядра  $K_{ij}(x,\eta)$  – регулярны в квадрате  $a \leq x, \eta \leq b$  с начальными функциями

$$y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0)\varphi^{(i)}(u_j(x)), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad x \in E_{x_0}, \quad (2)$$

где  $E_{x_0} = \bigcup_{j=0}^l E_{x_0}^j$ ,  $E_{x_0}^j$  – множество точек, для которых соответствующие  $u_j(x) \leq x$  при  $x \geq x_0 \quad \forall j = \overline{1, l}$ , а  $E_{x_0}^0 = [a, x_0]$ , функции  $\varphi_i(x)$  – заданы и  $\varphi_i(x_0) = 1, \quad \forall i = \overline{0, n-1}$ .

Рассмотрим уравнение (1) с линейными билокальными краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{i\tau}y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau}y^{(i)}(x_1)] = \gamma_\tau, \quad \tau = \overline{0, n-1}, \quad a \leq x_0 < x_1 \leq b. \quad (3)$$

**Решение краевой задачи**

Предполагая, что решение задачи (1), (2), (3) существует и единственно, решение на отрезке  $x \in [x_0, b]$  будем искать, применив для преобразований модификацию функции гибкой структуры, полученную в работе [4] для решения краевых задач

$$\begin{aligned} y^{(i)}(u_j(x)) = & D^{-1} \left\{ \sum_{s=1}^n \frac{\partial^s \Delta_s(u_j(x) - x_0)}{\partial x^s} \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{s\tau}}{\omega} [\gamma_\tau - \right. \\ & \left. - D^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1 - t)}{\partial x_1^k} \mu(t) dt \right\} + \\ & + \int_{x_0}^{u_j(x)} \frac{\partial^n \Delta_n(u_j(x) - t)}{\partial x^n} \mu(t) dt + \gamma_i u_j^{(i)}(x) \mu(u_j(x)). \quad j = \overline{0, l}, \quad (4^*) \end{aligned}$$

где  $i = \overline{0, n}$ ,  $\gamma_n = 1$ ,  $\gamma_i = 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1}$ .  $j = \overline{0, l}$ ,  $x \in [c_j, b]$ .

При этом начальные функции примут вид

$$y^{(i)}(u_j(x)) = \varphi_i(u_j(x)) \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{i\tau}}{\omega} [\gamma_{\tau} D^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1-t)}{\partial x^k} \mu(t) dt], \quad (2^*)$$

$$i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, l}, \quad x \in E_{x_0}.$$

Полученные выше формулы начальных функций и функции гибкой структуры с ее производными для краевой задачи в случаях 2 и 3 помечены теми же номерами, что и в работе [4], но со звездочкой.

Подставив выражения функции гибкой структуры и ее производных (4\*) в уравнение (1), учитывая при этом форму начальных функций (2\*), перенесем все известные выражения, получившиеся при этом, в правую часть равенства и проведем преобразования выражений под знаками интегралов, содержащих неизвестную функцию  $\mu(x)$ , суммировав интегралы, имеющие одинаковые пределы интегрирования. В общем случае получим для краевой задачи (1), (2), (3) разрешающее интегральное уравнение смешанного типа Вольтерра-Фредгольма с запаздывающим аргументом

$$\sum_{j=0}^l \{f_{nj}(x) u_j'^n(\eta) \mu(u_j(x)) + \int_{x_0}^{x_1} G_j(x,t) \mu(t) dt + \lambda \int_{x_0}^{u_j(x)} H_j(x,t) \mu(t) dt\} = F(x), \quad (6)$$

где ядра  $G_j(x,t)$ ,  $H_j(x,t)$  и функция  $F(x)$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} G_j(x,t) &= G_j^*(x,t) + G_j^{**}(x,t) + G_j^{***}(x,t), \\ H_j(x,t) &= H_j^*(x,t) + H_j^{**}(x,t) + H_j^{***}(x,t), \\ G_j^*(x,t) &= -D^{-2} \sum_{i=0}^n f_{ij}(x) \cdot \sum_{s=1}^n \frac{d^i \Delta_s(u_j(x) - x_0)}{dx^i} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{(s-1)\tau}}{\omega} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k} \mu(t) dt, \\ G_j^{**}(x,t) &= -D^{-1} \int_a^{c_j} \sum_{i=0}^n K_{ij}(x,\eta) \varphi_i(u_j(\eta)) \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{i\tau}}{\omega} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k} d\eta, \\ G_j^{***}(x,t) &= -D^{-2} \lambda \int_{c_j}^x \sum_{i=0}^n K_{ij}(x,\eta) \sum_{s=1}^n \frac{d^i \Delta_s(u_j(\eta) - x_0)}{d\eta^i} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{s\tau}}{\omega} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k} d\eta, \\ H_j^*(x,t) &= K_{nj}(x, u_j^{-1}(t)) u_j'^n(u_j^{-1}(t)) (u_j^{-1}(t))', \\ H_j^{**}(x,t) &= \sum_{i=0}^n f_{ij}(x) D^{-1} \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x) - t)}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_j^{***}(x,t) &= \int_{u_j^{-1}(t)}^x \sum_{i=0}^n K_{ij}(x,\eta) \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(\eta)-t)}{\partial \eta^i} d\eta, \\
 F(x) = f(x) &- \sum_{j=0}^l \sum_{i=0}^n \left[ f_{ij}(x) D^{-1} \sum_{s=1}^n \frac{\partial^i \Delta_s(u_j(x)-x_0)}{\partial x^i} \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{s\tau}}{\omega} \gamma_\tau + \right. \\
 &+ \lambda \int_a^{c_j} K_{ij}(x,\eta) \varphi_i(u_j(\eta)) \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{s\tau}}{\omega} \gamma_\tau d\eta + \\
 &\left. + \lambda \int_{c_j}^x K_{ij}(x,\eta) D^{-1} \sum_{s=1}^n \frac{\partial^i \Delta_s(u_j(\eta)-t)}{\partial \eta^i} \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{s\tau}}{\omega} \gamma_\tau d\eta \right].
 \end{aligned}$$

### Заключение

В периодической литературе имеются работы, которые затрагивают некоторые вопросы решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом, но мало работ, которые бы решали проблему преобразования начальных и краевых задач для таких уравнений к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом.

В данной статье с помощью функции гибкой структуры построено разрешающее уравнение первоначально поставленной краевой задачи. Затем, рассматривая различные типы разрешающих интегральных уравнений, предполагается решить вопрос о возможности преобразования краевых задач к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом. В дальнейшем планируется рассмотреть возможности оптимизации нахождения ее точного или приближенного решений за счет оптимального выбора параметров функции гибкой структуры и разработать программу решения поставленных задач на ЭВМ. Этому будут посвящены дальнейшие исследования и разработки программ.

### Литература

1. Громова П.С. Некоторые вопросы качественной теории интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1967. – Т.5. – С.61-76.
2. Куликов Н.К. Инженерный метод решения и исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1964. – 207 с.
3. Куликов Н.К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой // Тематический сб. МТИПП. – М., 1974. – С. 47-57.
4. Шишкин Г.А. Линейные интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма с запаздывающим аргументом. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2006. – 51 с.

*Г.А. Шишкин. Краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с функциональным запаздыванием*

---

5. Шишкин Г.А. Линейные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра с функциональным запаздыванием. – Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2009. – 64 с.

*Шишкин Геннадий Александрович*, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета. Тел. (3012)217733.

*Shishkin Gennady Alexandrovich*, candidate of physical and mathematical sciences, professor, applied mathematics department, Buryat State University.

УДК 519.968:531.33.1:535.4

© *И.Б. Юмов***О ЗАХВАЧЕННЫХ ВОЛНАХ В АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ  
С БЕСКОНЕЧНО ТОНКИМ ПРЕПЯТСТВИЕМ**

В работе показано существование собственной волны, захваченной бесконечно тонким препятствием в трехмерном акустическом волноводе с прямоугольным поперечным сечением, соответствующее собственное значение которой вложено в непрерывный спектр. Рассмотрены случаи крестообразного симметричного препятствия и плоской пластины, лежащей в плоскости симметрии.

**Ключевые слова:** акустический волновод, ловушечные моды, бесконечно тонкое препятствие, дискретный и непрерывный спектры, вариационный метод.

© *I.B. Yumov***ON THE TRAPPED WAVES IN ACOUSTIC WAVEGUIDE  
WITH INFINITELY THIN OBSTACLE**

The paper shows the existence of the eigenwave captured by an infinitely thin obstacle in three-dimensional acoustic waveguide with rectangular cross-section corresponding to the eigenvalue which is embedded in the continuous spectrum. The cases of symmetric cruciform obstacle and a flat plate in the plane of symmetry are considered.

**Keywords:** acoustic waveguide, trapped modes, infinitely thin obstacle, discrete and continuous spectra, the variational method.

Во многих областях физики имеет важное значение исследование собственных колебаний в неограниченных волноводных областях. Первые известные исследования спектральных свойств лапласиана в областях с бесконечной границей были проведены Реллихом [1] в 1940-е гг. и чуть позднее – Джоунсом [2]. В частности, ими было показано, что лапласиан имеет собственные значения для класса локальных возмущений достаточно гладких полуцилиндрических областей. Возрождение интереса к данной тематике в последнее время обусловлено в первую очередь актуальностью исследования аэроакустического резонанса, например, в турбомашинах (газовых, паровых и гидравлических турбинах, насосах, компрессорах), трубопроводах и т.п. (обзор некоторых работ экспериментального характера содержится в работе [3]). Отметим работы [7,11], в которых рассмотрены случаи цилиндрических тонкостенных препятствий в волноводе, и работу [8], где проведено численное исследование акустического резонанса около крестообразного препятствия, образованного

двумя прямоугольными пластинами в канале квадратного сечения. Необходимо также упомянуть работы [13-16], в которых рассматривается метод изучения собственных колебаний, основанный на свойствах расширенной матрицы рассеяния.

В работе рассматривается математическая модель акустических резонансных явлений около бесконечно тонких перегородок в волноводе прямоугольного сечения. Препятствия такого вида широко используются в аэродинамике для выпрямления потока газа [8].

Рассматривается область:

$$\Omega_0 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in (-d_1, d_1), y \in (-d_2, d_2), z \in \mathbf{R}\}, \quad (1)$$

которая моделирует волновод. В нем помещено препятствие  $B$ , симметричное относительно координатных плоскостей  $x = 0$  и  $y = 0$ . Множество  $B$  представляет собой объединение двух бесконечно тонких пластин  $B_1$  и  $B_2$  ненулевой площади, расположенных в плоскостях  $x = 0$  и  $y = 0$  соответственно, симметрично относительно оси  $Oz$ . Пластины  $B_1$  и  $B_2$ , границы которых достаточно гладкие, пересекаются, образуя крестообразное препятствие. Предполагается, что

$$B_1 \cap B_2 = \{(x, y, z) \in \Omega_0 : x = 0, y = 0, a \leq z \leq b\}$$

и существует  $\delta > 0$  такое, что множество

$$B_j \cap \{(x, y, z) \in \Omega_0 : x^2 + y^2 \leq \delta, a \leq z \leq b\}$$

является прямоугольником ( $j = 1, 2$ ).

Рассматривается краевая задача Неймана для уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + \lambda)u = 0 \quad \text{в } \Omega = \Omega_0 \setminus B, \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2)$$

описывающая колебания акустических волн. Здесь  $\lambda = \omega^2 / c^2$ ,  $\omega$  – частота акустических колебаний,  $c$  – скорость звука,  $\bar{n}$  – вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ . Известно, что дискретный спектр задачи (2) пуст, т.е. собственные значения (если они существуют) могут быть вложены в непрерывный спектр задачи, который заполняет неотрицательную полуось  $[0, +\infty)$ .

Далее будут использованы обозначения:

$$K^a = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y > 0\}, \quad \Omega^a = \Omega \cap K^a, \quad B^a = B \cap \bar{K}^a,$$

$$\partial\Omega^a = \partial\Omega \cap K^a, \quad \Gamma = X \cup Y, \quad \Gamma^a = \Gamma \cap \bar{K}^a,$$

где  $X$  (соответственно  $Y$ ) есть проекция множества  $\bar{\Omega}$  на плоскость  $y = 0$  ( $x = 0$  – соответственно).

Цель работы – показать существование собственных значений, принадлежащих интервалу  $(0, \Lambda_0^2)$ , где  $\Lambda_0^2 = \pi^2 / (4d_1^2) + \pi^2 / (4d_2^2)$ . Для этого применяется прием постановки искусственных краевых условий Дирихле [10] на плоскостях симметрии. Рассмотрим сужение задачи (2) на четверть волновода  $\Omega^a$

$$(\Delta + \lambda)u^a = 0 \text{ в } \Omega^a, \quad \frac{\partial u^a}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ на } \partial\Omega^a, \quad u^a = 0 \text{ на } \Gamma^a. \quad (3)$$

Непрерывный спектр же задачи (3) в отличие от спектра задачи (2) заполняет промежуток  $[\Lambda_0^2, +\infty)$ , а левее точки отсечки  $\Lambda_0^2$  могут существовать собственные значения задачи (3). Очевидно, что если  $\lambda^*$  есть собственное значение задачи (3), то оно является собственным значением задачи (2). В самом деле, если  $u^a$  есть собственная функция задачи (3), соответствующая  $\lambda^*$ , то можно определить функцию

$$u(x, y, z) = \begin{cases} u^a(x, y, z) & \text{для } (x, y, z) \in \Omega^a, \\ -u^a(-x, y, z) & \text{для } (x, y, z) \in \Omega, x \leq 0, y > 0, \\ -u^a(x, -y, z) & \text{для } (x, y, z) \in \Omega, x > 0, y \leq 0, \\ u^a(-x, -y, z) & \text{для } (x, y, z) \in \Omega, x < 0, y < 0, \end{cases}$$

которая будет являться собственной функцией задачи (2) из  $H^1(\Omega)$ , соответствующей тому же самому собственному значению  $\lambda^*$ . Отметим, что наличие нетривиальных решений задачи (2), исчезающих на бесконечности (захваченных волн), может привести к явлению резонанса, т.е. к аккумуляции энергии в ограниченных областях.

Через  $C_0^\infty$  обозначим подмножество класса бесконечно дифференцируемых функций в  $\overline{\Omega^a}$ , обладающих свойствами

- а)  $u(x, y, z) = 0$  для  $(x, y, z) \in \Gamma^a$ ,
- б) носитель  $u(x, y, z)$  ограничен в  $\overline{\Omega^a}$ .

На  $C_0^\infty$  определим полунорму

$$\|u\| = \left( \iiint_{\Omega^a} u \bar{u} d\Omega + \iiint_{\Omega^a} (\nabla u \cdot \overline{\nabla u}) d\Omega \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где  $d\Omega = dx dy dz$ . Обозначим через  $H_0^1$  пространство Соболева, полученное замыканием  $C_0^\infty$  в полунорме (4).

Доказательство существования собственных значений левее точки отсечки  $\Lambda_0^2$  проводится вариационным методом [10-12, 15, 16]). Имеет место

**Лемма 1** [4]. Пусть

$$\lambda_0 = \inf_{\substack{\psi \in H_0^1 \\ \psi \neq 0}} \frac{\iiint_{\Omega^a} |\nabla \psi|^2 d\Omega}{\iiint_{\Omega^a} |\psi|^2 d\Omega}. \quad (5)$$

Тогда  $\lambda_0 \leq \Lambda_0^2$ .

Более того, если

$$\lambda_0 < \Lambda_0^2, \quad (6)$$



то  $\lambda_0$  – наименьшее собственное значение задачи (3), и если

$$\lambda_0 = \Lambda_0^2, \quad (7)$$

то в интервале  $(-\infty, \Lambda_0^2)$  не существует собственных значений задачи (3).

Известно, что для ограниченных областей выражение (5) дает величину наименьшего собственного значения соответствующего самосопряженного расширения оператора Лапласа  $(-\Delta)$ , но в случае неограниченных областей  $\lambda_0$  может быть как собственным значением, так и нижней границей непрерывного спектра.

Введем некоторые обозначения. Пусть  $\rho(\tau)$  – достаточно гладкая четная функция, такая, что

$$\left. \begin{aligned} \rho(\tau) &= 1, & \text{если } |\tau| \leq 1, \\ \rho(\tau) &= 0, & \text{если } |\tau| \geq 2, \\ 0 < \rho(\tau) < 1, & \text{если } 1 < |\tau| < 2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $D_\varepsilon^1$  – множество на плоскости  $Oyz$

$$D_\varepsilon^1 = \{ (0, y, z) \in B_1 : \text{dist}((0, y, z), \partial B_1) \leq \varepsilon \}.$$

Пусть  $\chi_\varepsilon(x, z)$  – достаточно гладкая функция, такая, что

$$\left. \begin{aligned} \chi_\varepsilon(y, z) &= 1, & \text{если } (0, y, z) \in B_1 \setminus D_\varepsilon^1, \\ \chi_\varepsilon(y, z) &= 0, & \text{если } (0, y, z) \in \Omega, \\ 0 \leq \chi_\varepsilon(y, z) \leq 1, & \text{если } (0, y, z) \in D_\varepsilon^1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Аналогично определяются множество  $D_\varepsilon^2$  в плоскости  $Oxz$  и достаточно гладкая функция  $\eta_\varepsilon(x, z)$ :

$$\left. \begin{aligned} D_\varepsilon^2 &= \{ (x, 0, z) \in B_2 : \text{dist}((x, 0, z), \partial B_2) \leq \varepsilon \}, \\ \eta_\varepsilon(x, z) &= 1, & \text{если } (x, 0, z) \in B_2 \setminus D_\varepsilon^2, \\ \eta_\varepsilon(x, z) &= 0, & \text{если } (x, 0, z) \in \Omega, \\ 0 \leq \eta_\varepsilon(x, z) \leq 1, & \text{если } (x, 0, z) \in D_\varepsilon^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Имеет место

**Теорема 1.** Пусть множество  $B$  – объединение двух бесконечно тонких пластин  $B_1$  и  $B_2$  ненулевой площади, расположенных в плоскостях  $x = 0$  и  $y = 0$  соответственно, симметрично относительно оси  $Oz$ . Предполагается, что пластины имеют достаточно гладкую границу,  $B_1 \cap B_2 = \{(x, y, z) \in \Omega_0 : x = 0, y = 0, a \leq z \leq b\}$  и существует  $\delta > 0$  такое, что множество  $B_j \cap \{(x, y, z) \in \Omega_0 : x^2 + y^2 \leq \delta, a \leq z \leq b\}$  является прямоугольником ( $j = 1, 2$ ). Тогда задача (2) имеет собственное значение, которое принадлежит интервалу  $(0, \Lambda_0^2)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим пробную функцию

$$\psi = \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right)\rho\left(\frac{z}{R}\right) + \frac{1}{R^\beta}(\rho(R^\alpha y)\eta_\varepsilon(x, z) + \rho(R^\alpha x)\chi_\varepsilon(y, z)), \quad (11)$$

где  $\alpha, \beta, R > 0$ . Очевидно, что функция  $\psi(x, y, z)$  для достаточно большого  $R$  принадлежит  $H_0^1$ .

Для доказательства теоремы достаточно доказать неравенство

$$\Lambda_0^2 \iiint_{\Omega^\alpha} |\psi|^2 d\Omega - \iiint_{\Omega^\alpha} |\nabla \psi|^2 d\Omega > 0 \quad (12)$$

для достаточно большого  $R$  и достаточно малого фиксированного  $\varepsilon > 0$ . В самом деле, из неравенства (12), согласно лемме 1, следует существование наименьшего собственного значения задачи (3) в интервале  $(0, \Lambda_0^2)$ , которое является собственным значением и для задачи (2). Из вида функции  $\psi(x, y, z)$  получаем

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right)\rho^2\left(\frac{z}{R}\right) + \frac{1}{R^{2\beta}}\rho^2(R^\alpha y)\eta_\varepsilon^2(x, z) + \\ &+ \frac{1}{R^{2\beta}}\rho^2(R^\alpha x)\chi_\varepsilon^2(y, z) + \\ &+ \frac{2}{R^\beta}\sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right)\rho\left(\frac{z}{R}\right)\rho(R^\alpha y)\eta_\varepsilon(x, z) + \frac{2}{R^\beta}\sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \times \\ &\times \rho\left(\frac{z}{R}\right)\rho(R^\alpha x)\chi_\varepsilon(y, z) + \frac{2}{R^\beta}\rho(R^\alpha y)\eta_\varepsilon(x, z)\rho(R^\alpha x)\chi_\varepsilon(y, z), \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\nabla \psi|^2 &= \frac{\pi^2}{4d_1^2}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right)\rho^2\left(\frac{z}{R}\right) + \frac{1}{R^{2\beta}}\rho^2(R^\alpha y)\left(\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x}\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{R^{2(\beta-\alpha)}}(\rho'(R^\alpha x))^2\chi_\varepsilon^2(y, z) + \frac{\pi}{R^\beta d_1}\cos\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right)\rho\left(\frac{z}{R}\right) \times \\ &\rho(R^\alpha y)\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\pi}{R^{\beta-\alpha}d_1}\cos\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right)\rho\left(\frac{z}{R}\right)\rho'(R^\alpha x)\chi_\varepsilon(y, z) + \\ &+ \frac{2}{R^{2\beta-\alpha}}\rho(R^\alpha y)\rho'(R^\alpha x)\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x}\chi_\varepsilon(y, z) + \frac{\pi^2}{4d_2^2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right)\cos^2\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right)\rho^2\left(\frac{z}{R}\right) + \\ &+ \frac{1}{R^{2(\beta-\alpha)}}(\rho'(R^\alpha y))^2\eta_\varepsilon^2 + \frac{1}{R^{2\beta}}\rho^2(R^\alpha x)\left(\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial y}\right)^2 + \\ &+ \frac{\pi}{d_2 R^{\beta-\alpha}}\sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right)\rho\left(\frac{z}{R}\right)\rho'(R^\alpha y)\eta_\varepsilon(x, z) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi}{d_2 R^\beta} \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \rho(R^\alpha x) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial y} \rho\left(\frac{z}{R}\right) + \\
& + \frac{2}{R^{2\beta-\alpha}} \rho'(R^\alpha y) \rho(R^\alpha x) \eta_\varepsilon(x, z) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial y} + \frac{1}{R^2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \left(\rho'\left(\frac{z}{R}\right)\right)^2 \\
& + \frac{1}{R^{2\beta}} \rho^2(R^\alpha y) \left(\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{R^{2\beta}} \rho^2(R^\alpha x) \left(\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial z}\right)^2 + \\
& \frac{2}{R^{1+\beta}} \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \rho'\left(\frac{z}{R}\right) \rho(R^\alpha y) \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial z} + \frac{2}{R^{1+\beta}} \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \times \\
& \times \rho'\left(\frac{z}{R}\right) \rho(R^\alpha x) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial z} + \frac{2}{R^{2\beta}} \rho(R^\alpha y) \rho(R^\alpha x) \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial z}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Предположим, что препятствие  $B$  принадлежит множеству  $\{(x, y, z) \in \Omega_0 : |z| < R\}$ . Введем обозначения для интегралов из (12).

$$I_1 = \iiint_{\Omega_0^a} |\psi|^2 d\Omega, \quad I_2 = \iiint_{\Omega_0^a} |\nabla \psi|^2 d\Omega. \quad (15)$$

Представим их в виде:

$$I_1 = \sum_{i=1}^6 B_i, \quad (16)$$

$$I_2 = \sum_{j=1}^{18} A_j, \quad (17)$$

где  $B_i$  – соответствующий интеграл от  $i$ -го слагаемого в правой части формулы (13),  $A_j$  – соответствующий интеграл от  $j$ -го слагаемого в правой части формулы (14). Тогда

$$\begin{aligned}
\Lambda_0^2 I_1 - I_2 &= \Lambda_0^2 \left( \sum_{i=1}^6 B_i \right) - \sum_{j=1}^{18} A_j = \left[ \Lambda_0^2 B_1 - A_1 - A_7 - A_{13} \right] + \\
& + \Lambda_0^2 \left( \sum_{i=2}^6 B_i \right) - \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 7, 13}}^{18} A_j = -\frac{d_1 d_2}{4R} \int_{1 \leq |\tau| \leq 2} (\rho'(\tau))^2 d\tau + \Lambda_0^2 \left( \sum_{i=2}^6 B_i \right) - \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 7, 13}}^{18} A_j. \quad (18)
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$X^a = B_2 \cap \bar{K}^a, \quad Y^a = B_1 \cap \bar{K}^a, \quad D_\varepsilon^{i,a} = D_\varepsilon^i \cap \bar{K}^a \quad (i=1, 2).$$

Оценим остальные слагаемые в правой части формулы (18) при  $R \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{R^{2\beta}} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho^2(R^\alpha y) dy \iint_{X^a} \eta_\varepsilon^2(x, z) dx dz = \\
&= \frac{1}{R^{2\beta+\alpha}} \int_0^2 \rho^2(\tau) d\tau \iint_{X^a} \eta_\varepsilon^2(x, z) dx dz = O\left(\frac{1}{R^{2\beta+\alpha}}\right), \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_3 &= \frac{1}{R^{2\beta}} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho^2(R^\alpha x) dx \iint_{Y^a} \chi_\varepsilon^2(y, z) dy dz = \\
 &= \frac{1}{R^{2\beta+\alpha}} \int_0^2 \rho^2(\tau) d\tau \iint_{Y^a} \chi_\varepsilon^2(y, z) dy dz = O\left(\frac{1}{R^{2\beta+\alpha}}\right), \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_4 &= \frac{2}{R^\beta} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho(R^\alpha y) \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) dy \iint_{X^a} \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \eta_\varepsilon(x, z) dx dz = \\
 &= \frac{2}{R^{\beta+\alpha}} \int_0^2 \rho(\tau) \sin\left(\frac{\pi \tau}{2d_2 R^\alpha}\right) d\tau \iint_{X^a} \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \eta_\varepsilon(x, z) dx dz = \\
 &= O\left(\frac{1}{R^{\beta+2\alpha}}\right), \tag{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_5 &= \frac{2}{R^\beta} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho^2(R^\alpha x) \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) dx \iint_{Y^a} \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \chi_\varepsilon(y, z) dy dz = \\
 &= \frac{2}{R^{\beta+\alpha}} \int_0^2 \rho(\tau) \sin\left(\frac{\pi \tau}{2d_1 R^\alpha}\right) d\tau \iint_{Y^a} \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \chi_\varepsilon(y, z) dy dz = \\
 &= O\left(\frac{1}{R^{\beta+2\alpha}}\right), \tag{22}
 \end{aligned}$$

$$B_6 \leq \frac{2}{R^\beta} \mu_2(X^a) \mu_2(Y^a) \left( \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho(R^\alpha x) dx \right)^2 = O\left(\frac{1}{R^{\beta+2\alpha}}\right), \tag{23}$$

так как  $\eta_\varepsilon, \chi_\varepsilon \leq 1$  на  $X^a$  и  $Y^a$  соответственно.

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{1}{R^{2\beta}} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho^2(R^\alpha y) dy \iint_{D_\varepsilon^{2,a}} \left( \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x}(x, z) \right)^2 dx dz = \\
 &= \frac{1}{R^{2\beta+\alpha}} \int_0^2 \rho^2(\tau) d\tau \iint_{D_\varepsilon^{2,a}} \left( \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x}(x, z) \right)^2 dx dz = O\left(\frac{1}{R^{2\beta+\alpha}}\right), \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{1}{R^{2\beta-2\alpha}} \int_{R^{-\alpha}}^{2R^{-\alpha}} (\rho'(R^\alpha x))^2 dx \iint_{Y^a} \chi_\varepsilon^2(y, z) dy dz = \\
 &= \frac{1}{R^{2\beta-\alpha}} \int_1^2 (\rho'(\tau))^2 d\tau \iint_{Y^a} \chi_\varepsilon^2(y, z) dy dz = O\left(\frac{1}{R^{2\beta-\alpha}}\right), \tag{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \frac{\pi}{d_1 R^\beta} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho(R^\alpha y) \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) dy \iint_{X^a} \cos\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \left( \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x} \right) dx dz = \\
 &= \frac{\pi}{d_1 R^{\beta+\alpha}} \int_0^2 \rho(\tau) \sin\left(\frac{\pi \tau}{2d_2 R^\alpha}\right) d\tau \iint_{D_\varepsilon^{2,a}} \cos\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \left( \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x} \right) dx dz = O\left(\frac{1}{R^{\beta+2\alpha}}\right), \tag{26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_5 &= \frac{\pi}{d_1 R^{\beta-\alpha}} \int_{R^{-\alpha}}^{2R^{-\alpha}} \rho'(R^\alpha x) \cos\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) dx \iint_{y^a} \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \chi_\varepsilon(y, z) dy dz = \\
 &= \frac{\pi}{d_1 R^\beta} \left[ -1 + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4d_1 R^\alpha}\right) + \frac{\pi}{2d_1 R^\alpha} \int_1^2 \rho(\tau) \sin\left(\frac{\pi \tau}{2d_1 R^\alpha}\right) d\tau \right] \times \\
 &\times \iint_{y^a} \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \chi_\varepsilon(y, z) dy dz, \tag{27}
 \end{aligned}$$

$$|A_6| \leq \frac{2}{R^{2\beta-\alpha}} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho(R^\alpha y) dy \iint_{D_\varepsilon^{2,a} \cap \{x \in [R^{-\alpha}, 2R^{-\alpha}]\}} \left| \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x} \rho'(R^\alpha x) \right| dx dz = O\left(\frac{1}{R^{2\beta}}\right), \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 A_8 &= \frac{1}{R^{2\beta-2\alpha}} \int_{R^{-\alpha}}^{2R^{-\alpha}} (\rho'(R^\alpha y))^2 dy \iint_{X^a} \eta_\varepsilon^2(x, z) dx dz = \\
 &= \frac{1}{R^{2\beta-\alpha}} \int_1^2 (\rho'(\tau))^2 d\tau \iint_{X^a} \eta_\varepsilon^2(x, z) dx dz = O\left(\frac{1}{R^{2\beta-\alpha}}\right), \tag{29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_9 &= \frac{1}{R^{2\beta}} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho^2(R^\alpha x) dx \iint_{D_\varepsilon^{2,a}} \left( \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial y} \right)^2 dy dz = \\
 &= \frac{1}{R^{2\beta+\alpha}} \int_0^2 \rho(\tau) d\tau \iint_{D_\varepsilon^{1,a}} \left( \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial y} \right)^2 dy dz = O\left(\frac{1}{R^{2\beta+\alpha}}\right), \tag{30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{10} &= \frac{\pi}{d_2 R^{\beta-\alpha}} \int_{R^{-\alpha}}^{2R^{-\alpha}} \rho'(R^\alpha y) \cos\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) dy \iint_{X^a} \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \eta_\varepsilon(x, z) dx dz = \\
 &= \frac{\pi}{d_2 R^\beta} \left[ -1 + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4d_2 R^\alpha}\right) + \frac{\pi}{2d_2 R^\alpha} \int_1^2 \rho(\tau) \sin\left(\frac{\pi \tau}{2d_2 R^\alpha}\right) d\tau \right] \times \\
 &\times \iint_{X^a} \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \eta_\varepsilon(x, z) dx dz, \tag{31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{\pi}{d_2 R^\beta} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho(R^\alpha x) \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) dx \iint_{y^a} \cos\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial y}(y, z) dy dz = \\
 &= \frac{\pi}{d_2 R^{\beta+\alpha}} \int_0^2 \rho(\tau) \sin\left(\frac{\pi \tau}{2d_1 R^\alpha}\right) d\tau \iint_{y^a} \cos\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial y}(y, z) dy dz = O\left(\frac{1}{R^{\beta+2\alpha}}\right) \tag{32}
 \end{aligned}$$

$$|A_{12}| \leq \frac{2}{R^{2\beta-\alpha}} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho(R^\alpha x) dx \iint_{D_\varepsilon^{1,a} \cap \{y \in [R^{-\alpha}, 2R^{-\alpha}]\}} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial y} \rho'(R^\alpha y) dy dz = O\left(\frac{1}{R^{2\beta}}\right) \tag{33}$$

$$A_{14} = \frac{1}{R^{2\beta}} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho^2(R^\alpha y) dy \iint_{D_\varepsilon^{2,a}} \left( \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial z} \right)^2 dx dz = O\left(\frac{1}{R^{2\beta+\alpha}}\right), \tag{34}$$

$$A_{15} = \frac{1}{R^{2\beta}} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho^2(R^\alpha x) dx \iint_{D_\varepsilon^{1,\alpha}} \left( \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial z} \right)^2 dy dz = O\left( \frac{1}{R^{2\beta+\alpha}} \right), \quad (35)$$

$A_{16} = A_{17} = 0$ , так как  $\text{supp } \rho'(z/R) \cap B = \emptyset$ ,

$$|A_{18}| \leq \frac{C}{R^{2\beta-\alpha}} \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho(R^\alpha y) dy \int_0^{2R^{-\alpha}} \rho(R^\alpha x) dx = O\left( \frac{1}{R^{2\beta+2\alpha}} \right). \quad (36)$$

Потребуем, чтобы выполнялась система неравенств

$$\left. \begin{aligned} 1 > \beta > 1/2, \quad \beta + 2\alpha \geq 1, \quad 2\beta + \alpha \geq 1, \\ 2\beta - \alpha \geq 1, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Отсюда наибольший вклад в асимптотику  $\Lambda_0^2 I_1 - I_2$  при  $R \rightarrow +\infty$  дают слагаемые с  $A_5$  и  $A_{10}$ . Пусть  $\alpha = 0,4$  и  $\beta = 0,7$ .

Тогда справедливо асимптотическое представление

$$\Lambda_0^2 I_1 - I_2 = \frac{\pi}{R^{0,7}} \left( \frac{1}{d_2} \iint_{x^a} \sin\left(\frac{\pi x}{2d_1}\right) \eta_\varepsilon(x, z) dx dz + \frac{1}{d_1} \iint_{y^a} \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \chi_\varepsilon(y, z) dy dz \right) + O(R^{-1}) \quad \text{при } R \rightarrow +\infty, \quad (38)$$

из которого следует выполнение неравенства (12). Теорема доказана. ■

Применим вариационный метод для случая бесконечно тонкого препятствия, протяженного вдоль оси волновода. Пусть  $B$  есть бесконечно тонкая пластина ненулевой площади с кусочно-гладкой границей, расположенная в плоскости  $y = 0$ .

Введем обозначения

$$\Omega^{up} = \{(x, y, z) \in \Omega_0 : y > 0\}.$$

Рассмотрим сужение задачи (2) на половину волновода  $\Omega^{up}$

$$(\Delta + \lambda)u^{up} = 0 \text{ в } \Omega^{up}, \quad \frac{\partial u^{up}}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ на } \partial\Omega^{up} \setminus X, \quad u^{up} = 0 \text{ на } X. \quad (39)$$

Имеет место утверждение, аналогичное лемме 1, где  $\Lambda_0^2 = \pi^2 / 4d_2^2$  – точка отсечки непрерывного спектра задачи (39),  $H_0^1$  – пространство Соболева, полученное замыканием в полунорме (12), где  $\Omega^a$  надо заменить на  $\Omega^{up}$ , подмножества класса бесконечно дифференцируемых функций в  $\overline{\Omega^{up}}$ , удовлетворяющих условиям:

а') функция  $u(x, y, z) = 0$  для  $(x, y, z) \in X$ ,

б') носитель  $u(x, y, z)$  ограничен в  $\Omega^{up}$ .

Справедлива

**Теорема 2.** Пусть  $B$  – бесконечно тонкая пластина ненулевой площади с достаточно гладкой границей, расположенная в полосе  $\{(x, y, z) \in \Omega_0 : y = 0\}$ . Тогда существует наименьшее собственное значение задачи (2), которое принадлежит интервалу  $(0, \pi^2 / 4d_2^2)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $D_\varepsilon$  – множество на плоскости  $Oxz$

$D_\varepsilon = \{ (x, 0, z) \in B : \text{dist}((x, 0, z), \partial B) \leq \varepsilon \}$ ,  $\chi_\varepsilon(x, z)$  – достаточно гладкая функция, такая, что

$$\left. \begin{aligned} \chi_\varepsilon(x, z) &= 1, & \text{если } (x, 0, z) &\in B \setminus D_\varepsilon, \\ \chi_\varepsilon(x, z) &= 0, & \text{если } (x, 0, z) &\in X, \\ 0 \leq \chi_\varepsilon(x, z) &\leq 1, & \text{если } (x, 0, z) &\in D_\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

В качестве пробной функции можно выбрать

$$\psi(x, y, z) = \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \rho\left(\frac{z}{R}\right) + \frac{1}{R^{0,8}} \rho(R^{0,6} y) \chi_\varepsilon(x, z), \quad (41)$$

где функции  $\rho$  и  $\chi_\varepsilon$  определены формулами (16) и (40). Вычисления, подобные тому, какие были проведены в теореме 1, показывают, что справедливо представление

$$\frac{\pi^2}{4d_2^2} \iiint_{\Omega^{up}} |\psi|^2 d\Omega - \iiint_{\Omega^{up}} |\nabla \psi|^2 d\Omega = \frac{\pi}{d_2 R^{0,8}} \iint_B \chi_\varepsilon(x, z) dx dz + O(R^{-1}) \quad (42)$$

для достаточно большого  $R$  и достаточно малого фиксированного  $\varepsilon > 0$ , из которого следует утверждение теоремы. ■

**Замечание.** Рассмотрим случай волновода без препятствий. Известно [5], что в цилиндрическом волноводе задача Неймана (2) при  $B = \emptyset$  не имеет собственных значений. Пусть теперь волноводная область  $\Omega$  является кусочно-гладким локальным возмущением области  $\Omega_0$ , таким, что выполняются условия:

- а)  $\Omega_0 \subset \Omega$  и  $0 < \text{mes}_3(\Omega \setminus \Omega_0) < \infty$ ;
- б) существует  $r > 0$  такое, что  $\Omega \setminus \Omega(r) = \Omega_0 \setminus \Omega_0(r)$ ;
- в)  $\partial(\Omega \setminus \Omega_0) \cap \partial\Omega_0 \subset (\{y = d_2\} \cup \{y = -d_2\}) \cap \partial\Omega_0$ ;
- г)  $\overline{\Omega} \cap \{y = 0\} \subset \overline{\Omega_0}$ ;
- д)  $\Omega$  симметрично относительно плоскости  $y = 0$ .

Тогда существует собственная функция задачи (2), нечетная по переменной  $y$ , и соответствующее собственное значение принадлежит интервалу  $(0, \pi^2/4d_2^2)$ . Для доказательства достаточно рассмотреть в качестве пробной функцию

$$\psi(x, y, z) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi y}{2d_2}\right) \rho\left(\frac{z}{R}\right), & \text{для } (x, y, z) \in \Omega_0^{up}, \\ 1, & \text{для } (x, y, z) \in \Omega^{up} \setminus \Omega_0^{up}. \end{cases} \quad (43)$$

Тогда справедливо представление

$$\frac{\pi^2}{4d_2^2} \int_{\Omega_0^{up}} |\psi|^2 dx - \int_{\Omega_0^{up}} |\nabla \psi|^2 dx = \frac{\pi}{8d_2^2} \text{mes}_3(\Omega \setminus \Omega_0) - \frac{A}{R}, \quad (44)$$

где  $A$  – положительная постоянная, не зависящая от  $R$ . Из формулы (44) следует существование наименьшего собственного значения рассматриваемой задачи в интервале  $(0, \pi^2/4d_2^2)$ . Отсюда вытекает, что для любого

локального возмущения  $\Omega \setminus \Omega_0$  области  $\Omega_0$ , где область  $\Omega$  удовлетворяет условиям а) – д), существуют собственные значения задачи (2), погруженные в непрерывный спектр.

#### Литература

1. Rellich F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von  $\Delta u + \lambda u = 0$  // Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver. 51 (1943), №2, 57–65.
2. Jones D.S. The eigenvalues of  $\nabla^2 u + \lambda u = 0$  when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V.49. P.668–684.
3. Parker R., Stoneman S.A. The excitation and consequences of acoustic resonances in enclosed fluid flow around solid bodies // Proc. Inst. Mech. Engrs. 1989. V. 203. P. 9–19.
4. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. 264 с.
5. Werner P. Resonance phenomena in cylindrical waveguides // J. Math. Anal. Appl. 1987. V.121. P.173–214.
6. Сухинин С.В., Бардаханов С.П. Эоловы тона пластины в канале // ПМТФ. 1998. № 2. С. 69–77.
7. Сухинин С.В. Акустические колебания около тонкостенных цилиндрических препятствий в канале // ПМТФ.1999. №4. С.133–142.
8. Макаров А.И. Эоловы тона элементарной ячейки сотовой решетки // ПМТФ. 2002. №5. С. 69–76.
9. Yumov I.B. Existence theorems for eigenoscillations in 3D rectangular waveguides // Proc. of IXth Intern. Conf. on MMET\*02, Kiev, P.671–673.
10. Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D. Existence theorems for trapped modes // J. Fluid. Mech. 1994. V.261. P.21–31.
11. Davies E.B., Parnovski L. Trapped modes in acoustic waveguides // Q. Jl. Mech. Appl. Math. 1998. V.51. P. 477–492.
12. Linton C. M., McIver P. Embedded trapped modes in water waves and acoustics // Wave Motion. 2007. V. 45. P. 16–29.
13. Камоцкий И.В., Назаров С.А. Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области // Записки науч. семинаров ПОМИ РАН. 2000. Т. 264. С. 66 – 82.
14. Назаров С.А. Критерий существования затухающих решений в задаче о резонаторе с цилиндрическим волноводом // Функциональный анализ и его приложения. 2006. Т. 40. Вып. 2. С. 20 – 32.
15. Назаров С.А. Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. №5. С. 1086 – 1101.



16. Назаров С.А. Волны, захваченные тонким искривленным экраном в волноводе с жесткими стенками // Акуст. журн. 2012. Т. 58. №6. С. 683 – 691.

*Юмов Игорь Бимбаевич*, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики Института математики и информатики Бурятского государственного университета, тел.: 8(3012) 219757, e-mail: [igyumov@mail.ru](mailto:igyumov@mail.ru)

*Yumov Igor Bimbaevich*, candidate of physical and mathematical sciences, head of department of mathematical analysis and methodology of teaching mathematics, Institute of Mathematics and Computer Science, Buryat State University, ph.: 8(3012) 219757, e-mail: [igyumov@mail.ru](mailto:igyumov@mail.ru)

## 4. Математическое моделирование

УДК 66.621.928.13

© *В.Д. Анахин*

### МОДЕЛИРОВАНИЕ И НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВИБРИРУЮЩИХ СИСТЕМ

Рассмотрено новое направление в теории колебаний применительно к совершенствованию процессов, актуальных в ряде современных технологий.

Разработаны модели процессов, предложен ряд формул скорости для их расчета и регулирования по теоретическим уравнениям и аналитическим зависимостям.

**Ключевые слова:** методы моделирования и теория колебаний, регулярная динамика механических систем и нелинейные задачи вибрационной динамики.

© *V.D. Anakhin*

### MODELING AND NONLINEAR DYNAMICS OF OSCILLATION PROCESSING SYSTEMS

A new direction in the theory of vibrations has been considered, it is applied to improvement of the processes that are relevant in a number of modern technologies. Processing models have been developed, a number of formula for speed of their calculation and regulation on theoretical equations and analytical dependences has been proposed.

**Keywords:** modeling methods and theory of oscillation, regular dynamics of mechanical systems and nonlinear problems of vibration dynamics.

Advanced oscillation processing systems are involved in the primary mode of completely new methods of application of vibration technology for efficient transport-related separation of chemicals, minerals, pharmaceuticals, foods, metallic powders (lead, copper, zinc, steel) and all types of powder products common in many industries: abrasive, powder metallurgy, paint and varnish, diamond, construction, mining and chemical. These new screen-less methods can be effectively used in the abrasive industry to produce materials in which more than 90% of the grains are isometric. Grinding wheels made from such grains are twice as effective as those made from regular grains which are unclassified by shape. Powder products generally are separated by particle size or shape without forming dust. In the diamond tool industry the vibrating equipment is used for selecting isometric, plane and needle-shaped diamond grains. In the agriculture and food industry this advanced machinery can utilized for removing harmful inclusions in grains. In the mining and chemical

industries high efficiency processing machinery with accurate separations in sizes from 15 mm down to 20  $\mu\text{m}$  can be used for many types of the ore. Separation is based on the velocity differences of the particles due to the existence of oscillating driving force. If components are to be separated, their relative friction coefficients on a vibrating deck may be pertinent. The friction coefficient is a function of the particle shape and the particle size. A common correlation of the friction coefficient  $f$  and of the adhesion force  $F_a$  to the particle size  $D$  in  $\mu\text{m}$  is that of the author [1]:

$$f_1 = 0,9 \cdot 10^{-0,001D} \quad (1)$$

$$F_a/mg = 7,46 \cdot D^{-0,24} - 1,68. \quad (2)$$

The above functionality is useful to understand the phenomenon of effective process.

There are two types of operating equipment: 1) harmonic motion of a deck, where direction of oscillation does not have a lateral tilt, and 2) vibration characterized by a lateral tilt with respect to the vertical direction. The direction of vibration is also inclined at the angle of vibration  $\beta$  with respect to the surface of the vibrating deck. A vibratory effect appears in the process so that particles with different sizes, shapes, or coefficients of friction, therefore with different angles of vibration separation  $\alpha_0$  move with different velocities over a separating surface. A subset of the two types of operation conditions are the 1st and 2nd basic separation mechanisms common to the 1st and 2nd types of machinery. The acceleration  $W_0 = A\omega^2 \sin\beta / g \cos\alpha$  is the operating condition factor for these two types of equipment, where  $A$  is the displacement amplitude of the deck,  $\omega$  is the angular frequency of the simple harmonic motion,  $\beta$  is the angle of vibration,  $g$  is the acceleration of gravity, and  $\alpha$  is the longitudinal tilt of the deck. The force driving the separation could be several orders of magnitude greater than of gravity. Particles will be intensively tossed upwards after a brief contact with the vibrating surface at phase angles  $\cos\delta_0^* = \frac{\pi p 1 + R}{W_0 1 + R}$

and  $\cos\delta_0^* = \frac{\pi p 1 + R}{W_0 1 + R} \cos\varepsilon$  for machinery of the 1st and 2nd types, respectively,

where  $\varepsilon$  is the lateral tilt of the deck with respect to horizon,  $\lambda$  (see below) and  $R$  are the coefficients of momentary friction and elasticity in accordance with Newton's theory of impact, the coefficient  $p$  defines regime of continuous rate of particle flight over vibrating deck. The particle velocities along the  $x$  and  $z$  axes are represented by

*for the equipment of the first type*

$$V_x = \frac{\pi p g}{\omega} \left( \frac{1-R}{1+R} \operatorname{ctg}\beta \cos\alpha - \frac{2-\lambda}{\lambda} \sin\alpha \right) \quad (3)$$

$$V_z = \frac{\pi p g}{\omega} \left( \frac{2-\lambda}{\lambda} - \frac{1-R}{1+R} \right) \cos\alpha \sin\varepsilon \quad (4)$$

*for the equipment of the second type*

$$V_x = \frac{\pi p g}{\omega} \left( \frac{1-R}{1+R} \operatorname{ctg}\beta \cos\alpha \cos\varepsilon - \frac{2-\lambda}{\lambda} \sin\alpha \right) \quad (5)$$

$$V_z = \frac{\pi p g}{\omega} \frac{2 - \lambda}{\lambda} \cos \alpha \sin \varepsilon. \quad (6)$$

To maximize the operation that must be dealt with developing an optimal process the phase angle  $\delta_0$  and parameter  $p$  can be determined as follows:

$$\cos \delta_0 = \pm 1, \quad p = W_0(1+R) / \pi(1-R).$$

Converting Eq. (3) – Eq. (6) and setting  $q = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \frac{1 - R}{1 + R}$ , where  $q$  is a particle parameter of vibration separation (a table of the parameter  $q$  as a function of  $\lambda$  &  $R$  is presented in [1]), the solution are of the forms:

*for the equipment of the first type*

$$V_x = A\omega(\cos \beta - \frac{\sin \beta}{q} \operatorname{tg} \alpha) \quad (7)$$

$$V_z = A\omega \sin \beta \sin \varepsilon (\frac{1}{q} - 1) \quad (8)$$

*for the machinery of the second type*

$$V_x = A\omega(\cos \beta - \frac{\sin \beta}{q \cos \varepsilon} \operatorname{tg} \alpha) \quad (9)$$

$$V_z = A\omega \frac{\sin \beta}{q \cos \varepsilon}. \quad (10)$$

Dividing equations (8), (10) by Eqs. (7), (9), respectively, the expressions for the trajectory of the particle movement for both types can be written

$$\frac{dz}{dx} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{(1 - q) \sin \varepsilon}{q \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} \quad (11)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{V_z}{V_x} = \frac{\sin \varepsilon}{q \operatorname{ctg} \beta \cos \varepsilon - \operatorname{tg} \alpha} \quad (12)$$

The XZ plane of the vibrating deck with its longitudinal and lateral axis in the X and Z directions, respectively, has the length  $l$  and the width  $b$  of the deck, respectively. Solving Eqs (11) - (12), separability is defined analytically as follows

*for the machinery of the first type*

$$d_{x_I} = \frac{dx}{dq} \Big|_{z=b} = \frac{b}{\sin \varepsilon} \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{(1 - q)^2} \quad (13)$$

$$d_{z_I} = \frac{dz}{dq} \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{l}{2} \sin \varepsilon \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{(q \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)^2} \quad (14)$$

*for the machinery of the second type*

$$D_{x_{II}} = d \operatorname{ctg} \varepsilon \operatorname{ctg} \beta \quad (15)$$

$$D_{z_{II}} = \frac{l}{4} \frac{\sin 2\varepsilon \operatorname{ctg} \beta}{(q \cos \varepsilon \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)^2}. \quad (16)$$

In the design and operation of separation processes, each process will give a maximum removal of a single component from the mixture, if  $q \operatorname{ctg} \beta / \operatorname{tg} \alpha = 1$  and  $\cos \varepsilon \operatorname{ctg} \beta / \operatorname{tg} \alpha = 1$ . The particle velocity in its movement in the longitu-

dinal direction can be reduced to zero. It can be used to write the angles of vibration separation for the 1st and 2nd types of equipment, as  $\alpha_{0\lambda} = \arctg(q\text{ctg}\beta)$ ,  $\alpha_{0\lambda} = \arctg(q\text{cose}\text{ctg}\beta)$ .

### **Conclusions**

The analytical and inventive aspects of design include: estimate the velocities of each components; evaluation its angles of separation; calculation the separability of the process; designing an efficient equipment and its control strategy.

### **References**

1. Anakhin V. et al. Vibrational separators. – M.: Nedra, 1991. – 157 p.

*Владимир Дмитриевич Анахин*, доктор технических наук, профессор кафедры машиноведения Бурятского государственного университета, e-mail: [anakhin@mail.ru](mailto:anakhin@mail.ru)

*Vladimir Dmitrievich Anakhin*, doctor of technical sciences, professor, department of engineering mechanics, Buryat State University, e-mail: [anakhin@mail.ru](mailto:anakhin@mail.ru)

УДК 517.977

© С.А. Ачитуев, Б. Очирбат

### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БИОЛОГИЧЕСКИМИ РЕСУРСАМИ С УЧЕТОМ ИННОВАЦИЙ

Рассматривается подход к учету инновационных процессов в моделях процедуры оптимизации посредством природных экономических критериев. В качестве важного примера задачи управления рассматриваются горные работы и развитие биологической популяции.

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, метод кратных максимумов, инновации.

© S.A. Achituev, B. Ochirbat

### OPTIMAL CONTROL OF BIOLOGICAL RESOURCES WITH INNOVATIONS<sup>1</sup>

The approach to the account of innovative processes in models of optimization procedure by natural economic criteria is considered. As a substantial example the problem of management is considered by a mining operations and development of biological population.

**Keywords:** optimal control problem, method of multiple maxima, innovations.

#### Introduction

In the given work the approach to the description of active innovative processes in mathematical models of optimum resource management by economic criteria, such as renewed and not renewed natural resources, agricultural and biotechnological populations develops, etc. the active are understood as the operated innovative processes demanding certain expenses. In a reality as those it is difficult enough to allocate these processes from the general dynamics of functioning of concrete objects in modern conditions of domination of innovative economy so at modeling it is required to formulate some general methodological principle of such allocation. The purpose of the given work – to describe it is formal in enough general view and to consider its new appendices, on an example of optimizations of strategy of mining operations. On the constructed mathematical models the basic ways of optimizations and acceptance of scientifically well-founded decisions are revealed.

---

<sup>1</sup> Work is supported by the Russian Foundation for Basic Researches (projects 12-01-00914, 12-01-98011, 13-01-92200)

### 1. Methodology and result

Let's characterize a condition of some biological population number:  $N^1$ ,  $N^2$ ,  $N^3$

- 1 group (younger) – from 0 till 1 year.
- 2 group (average) – from 1 till 2 years.
- 3 group (senior) – from 2 years also is more senior.

The characteristic of groups:

- 1 and 2 groups – sale of live cattle (breeding) is possible,
- 2 and 3 groups – manufacture of meat and other meat products,
- 3 groups – manufacture of dairy production.

The account to an age and sexual sign is conducted.

Let's enter factor, considering a forage reserve, it be artificial the prepared for ages, or grazing (pastures).

The basic dynamics of number of biological population is described by system of the equations:

$$\dot{N}^1 = (\sigma_3 \omega N_3)^\alpha - k_1 N^1 - U_1$$

$$\dot{N}^2 = \gamma_2 N^1 - k_2 N^2 - U_2$$

$$\dot{N}^3 = \gamma_3 N^2 - k_3 N^3 - U_3$$

$$\int_{t_n}^{t_k} [q_1 U_1 + q_2 U_2 + q_3 U_3 + (q \mu w N^3) - (p_1 N^1 + p_2 N^2 + p_3 N^3)] dt \rightarrow \mathbf{max} \quad (1)$$

$\mu$  – Quantity of dairy production for 1 year.

$\sigma_3$  – Fruitfulness factor.

$w$  – Factor of cows in herd.

$q_1$  – Sale price for population unit on the first group.

$q_2, q_3$  – Average cost production meat – on the second and third group.

$p_1, p_2, p_3$  – Maintenance cost in corresponding groups for a livestock.

$q$  – The price for dairy production.

$\gamma_2, \gamma_3$  – Indicators of intensity of transition from one group in the following.

$k_1, k_2, k_3$  – Natural decrease of population.

It is required to define a policy of conducting such economy on the set time interval,  $[t_n, t_k]$  i.e. the functions  $u^1(t) \geq 0, u^2(t) \geq 0, u^3(t) \geq 0$ , providing the maximum value functional (1) under following boundary conditions:

$$N^i(t_n) = N_n^i$$

$$N^i(t_k) \geq N_k^i$$

$$i = 1, 2, 3$$

Task in view we will investigate a method of multiple maxima.  
Let's make function "K" the following structure:

$$\begin{aligned}
 & K(t, N^1, N^2, N^3) \\
 & = \varphi_{N_1} [\delta(wN_3) - k_1 N^1 - u_1] + \varphi_{N_2} [\gamma_2 N^1 - k_2 N^2 - u_2] \\
 & + \varphi_{N_3} [\gamma_3 N^2 - k_3 N^3 - u_3] \\
 & + [g_1 u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3 + g \mu w N^3 - (p^1 N^1 + p_2 N^2 + p^3 N^3)] \\
 & + \varphi_t^r(t, N^1, N^2, N^3)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Here  $\varphi_{N^1}, \varphi_{N^2}, \varphi_{N^3}$  – private derivative functions of Krotov  $\varphi(t, N^1, N^2, N^3)$ .

The common decision:

$$u_1 : -\varphi_{N^1}^r + g_1 = 0$$

$$u_2 : -\varphi_{N^2} + g_2 = 0$$

$$u_3 : -\varphi_{N^3} + g_3 = 0$$

Looks like

$$\varphi(t, N_1, N_2, N_3) = g_1 N_1 + g_2 N_2 + g_3 N_3 + \varphi_t^r$$

$\varphi_t^i$  – Private derivative of function  $\varphi(t, N_1, N_2, N_3)$

Let's copy function K taking into account (2)

$$K = N_1[-g_1 k_1 + g_2 \gamma_2 + g_3 \gamma_3 - p_1] + N_2[-g_2 k_2 - p_2] + N_3[\mu w g - g_3 k_3 - p_3] + \varphi_t^r$$

Let's enter designations:

$$Q_1 = -g_1 k_1 + g_2 \gamma_2 + g_3 \gamma_3 - p_1$$

$$Q_2 = g_2 \gamma_2 - p_1$$

$$Q_3 = \mu w g - g_3 k_3 - p_3$$

Depending on a sign  $Q_1, Q_2, Q_3$  – various cases are possible.

Case 1  $Q_1 > 0, Q_2 < 0, Q_3 > 0$

Let's put  $\varphi(t, N_1, N_2, N_3) \equiv 0$

We solve a problem on max functions  $\varphi$  and min functions  $G$  which looks like

$$G(N_n^i, N_k^i) = g_1 N_1(t_k) + g_2 N_2(t_k) + \varphi_t^i$$

At the moment  $t = t_k$  it is visible, from boundary conditions that



$$G \rightarrow \min \text{ for } N^i(t_k) = N_k^i$$

$$K \rightarrow \max \begin{cases} u_1(t) = 0 \\ u_2(t) = 0 \\ u_3(t) = 0 \end{cases}$$

Strategy of sale of live cattle and the face, providing the maximum value functional, consists in population "accumulation" 2nd an interval  $[t_n, t_k)(u^i(t) - 0, i = 2, 3$  on this interval) with the subsequent withdrawal at the moment of time  $t = t_k$  of cattle for a meat-packing plant. Certainly, this conclusion is fair, if the decision  $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$  corresponding to managements  $u^2(t) = u^3(t) = 0$ , satisfies to inequalities  $N^i(t_k) \geq N_k^i, i = 2, 3$ . Otherwise in general there is no the management satisfying to set boundary conditions.

It is easy to see that if restrictions on management look like  $u^2(t) \geq u_b^2, u^3(t) \geq u_b^3$ , the optimum policy should consist in carrying out of a craft with the minimum intensity on all interval of planning, except for a final stage on which intensity of a craft sharply increases. Here  $u_b^i$  – the bottom borders of management which should be defined with the account both economic and biological factors. In particular, infringement of these borders can cause decrease in number of population to unfairly low level.

### **Conclusion**

The problem of rationing of influence by biological populations on environment consists in the following. At repeated excess of biological population in the limited territory where there is an economic interest, very vulnerable component of the world of the wild nature, untouchable is destroyed. Following ways of development with the assistance of the person are possible, or completely it is possible to destroy this or that resource, or to give the chance to (promote) boundless growth (development), in particular a biological resource where the problem of management and rationing questions become actual. It is required to establish norms on intensity of operation of resources, a biological resource at which observance of norm on quality of water and ground resources will not be broken for long enough period of time.

### **References**

1. Ukhin M. Yu., Aчитуев S.A. Optimization of strategy of development of region on multicomponent model. Automation and Remote Control. 2008. № 3. P. 178-189.

*Самбу Ачитуевич Ачитуев*, Ph.D., старший преподаватель кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета.

*Очирбат Батор*, Ph.D., профессор, Монгольский университет науки и технологий, Улан-Батор.

*Sambu Achituevich Achituev*, Ph.D., senior teacher of applied mathematics department of Buryat State University.

*Ochirbat Baatar*, Ph.D., professor, Mongolian University of Science and Technology, Ulanbaatar.

УДК 519.83+004.5

© *А.В. Воротынцева*

## **ГРАФЫ РАБОТ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

На примере задачи о течении влаги в пористой среде (почве) обсуждаются представления графами работ задач математической физики, решаемых методом прогонки. Представления ориентированы на расчеты, выполняемые в сети Интернет с помощью разработанной сетевой библиотеки вычислимых моделей.

**Ключевые слова:** распределенные вычисления, «облачные» вычисления, графы работ, представление моделей, математическое моделирование.

© *A. V. Vorotyntsev*

## **WORKFLOW GRAPHS FOR PRESENTATION OF SOME PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS**

The presentations of the problems of mathematical physics by workflow graphs solved by the sweep method are discussed on the example of the problem of moisture flow in the porous environment (soil). The presentations are focused on calculations which are carried out in the Internet network by means of developed network library of computable models.

**Keywords:** distributed calculations, «cloud» computing, workflow graphs, presentation of models, mathematical modeling.

### **Введение**

В связи с нарастающим многообразием и сложностью знаний становится актуальным создание сетевых библиотек моделей. В [1–4] изложены концепция и архитектура сетевой библиотеки Нива вычислимых математических моделей, результаты которых получают вычислениями на удаленном компьютере. К таким моделям можно отнести, например, имитационные модели.

В сетевой библиотеке модель представляется набором сценариев ее расчета. Сценарий для расчета модели на удаленном компьютере сетевой пользователь самостоятельно конструирует на своем компьютере в виде графа работ модельных компонент. Важно отметить, что сетевой пользователь оперирует здесь не отдельными математическими соотношениями модели, которые он зачастую недостаточно хорошо понимает, а оперирует заранее проверенными модельными компонентами. Таким образом, сетевая библиотека ориентирована на сетевого пользователя, а не на традиционную разработку моделей.

Библиотека не передает пользователю код модели. С согласия автора

библиотека может предоставлять пользователю текстовое описание модели. Это позволяет сохранять авторские права.

Удаленный компьютер называется сервером. Сервер рассчитывает сценарий и результаты пересылает пользователю.

Представление задач графами работ хорошо известно и используется в программировании [5]. Представляет интерес исследование вида графов работ, которые могут быть использованы для представления характерных вычислительных задач моделирования.

### 1. Графы работ и компоненты

Компонентой  $M=\{F,D\}$  вычислимой модели называется исполняемый компьютером программный код, который реализует некоторую функцию  $F$  без параметров и исполняет ее над набором  $D$  специфических данных, называемых далее слотами. Компоненты, имеющие одни и те же  $F$  и  $D$ , но отличающиеся значениями данных из  $D$ , назовем МодОбъектами. Композицию МодОбъектов, представленных узлами в графе работ, назовем сценарием использования модели. Совокупность сценариев использования одной модели будем называть ГиперМоделью.

Каждому МодОбъекту приписывается содержательное имя вида  $[m][d]$ , где  $m$  – имя для обозначения функциональности  $F$  компоненты  $M=\{F,D\}$ , а  $d$  – имя набора значений слотов  $D$  этой компоненты. МодОбъекты вместе с данными их слотов сохраняются в базе данных сервера. Имена  $[m][d]$  используются для поиска МодОбъектов в базе данных и в графе работ. На графе можно не указывать  $[d]$ , если компонента имеет только один МодОбъект. МодОбъекты изображаются пиктограммами, размещенными в узлах графа. Если МодОбъект реализует элементарную операцию, например «+» или «-», в его изображение включен треугольник, а  $[m]$  совпадает с именем операции.

Сценарий визуально (мышкой) конструируется пользователем в виде графа работ. Сценарий рассчитывается удаленным сервером после ввода пользователем своих данных в компоненты и проверки сервером правильности графа. Результаты расчета сервер посылает пользователю на его компьютер.

Таким образом, модели в сетевой библиотеке представляются семействами допустимых сценариев – графов работ модельных компонент. Каждое семейство допустимых графов имеет формальное описание, хранимое в библиотеке, в котором допустимые компоненты указываются именами вида  $[m][d]$ .

Под работой понимается исполнение компонентой  $\{F,D\}$  своей функции  $F$ . Работы выполняются в последовательности, указанной стрелками графа работ.

Декомпозиция модели в граф работ поддерживается механизмом обмена данными между модельными компонентами с помощью слотов. Слотом здесь называется специальная переменная компоненты, имеющая следующие свойства. Как переменная слот имеет тип и значение. Слот

может представлять массив чисел, строку символов и т.д. Перед началом вычислений слоты инициализируются начальными значениями. Эти значения либо встроены в код компоненты, либо задаются пользователем. Рабочая функция  $F$  компоненты  $M=\{F,D\}$  может использовать значение своего слота  $M.X$  как обычное данное и может изменять его значение. Функция  $F$  не может непосредственно изменять слоты других компонент.

Суть в том, что слоты различных компонент могут обмениваться значениями, если они связаны. Таким обменом поддерживается равенство значений связанных слотов. Так, если слот  $M1.X$  компоненты  $M1$  связан со слотом  $M2.Y$  (это обозначается как  $M1.X = @M2.Y$ ), тогда изменение компонентой  $M1$  слота  $M1.X$  немедленно вызывает такое же изменение значения слота  $M2.Y$  другой компоненты. Таким образом, выполняя вычислительную работу, компонента может использовать результаты вычислительной работы других компонент, переданные ей через связанные с ними слоты.

Описания допустимых конфигураций графов работ и связей между слотами компонент помещаются в библиотеку вместе с компонентами модели. Используя такие описания, исполняющая подсистема библиотеки устанавливает связи между слотами перед началом вычисления заданного сценария. При этом если связанная слотами с компонентой  $M1$  компонента  $M2$  не будет найдена, значение слота  $M1.X$  не будет изменяться окружением компоненты  $M1$ .

Для иллюстрации связи слотов могут изображаться на графе работ пунктирными стрелками.

## **2. Представление дерева рекурсии**

Рассмотрим представление рекурсий графами работ на примере простейшей рекуррентной последовательности  $Y_n = 0.5 * (Y_{n-1} + A/Y_{n-1})$ ,  $Y_1 = 1.5$ ,  $n \geq 1$ , сходящейся к  $\sqrt{A}$ . Выражение  $Y_n$  является арифметическим выражением, и для него можно построить очевидное дерево выражения (дерево рекурсии), которое преобразуется в граф работ, показанный на рис. 1.1. Здесь ромб изображает условную операцию `if`. Граф 1.2 отличается тем, что дерево выражения  $Y_{n-1} + A/Y_{n-1}$  представлено кольцевым подграфом, а компонента `if` агрегирована с компонентой рекурсии `[Recur][n]`. Пунктирные стрелки изображают передачу результатов вычислений связанными слотами компонент. Чтобы избежать дублирующих вычислений, используются ссылочные компоненты, которые только копируют результат связанной компоненты. Их имена на графах не указываются.

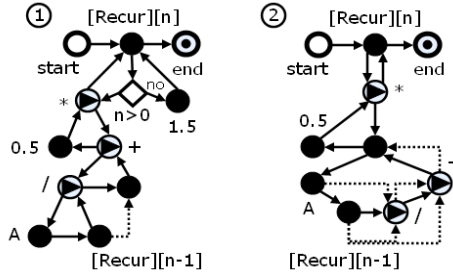


Рис. 1. Граф работ, представляющий рекуррентную последовательность  $Y_n$

Чтобы пояснить работу графа, рассмотрим рекурсивную функцию Func:

```
double Func(double A, int n)
{ return if n=1 then 1.5 else 0.5*(Func(A,n-1) + A/Func(A,n-1)); }
```

вычисляющую  $Y_n$  для действительного числа  $A$  и целого  $n$ . Напомним, как вычисляется Func. Чтобы вычислить  $Func(A,n)$ , программа должна сначала вычислить  $Func(A,n-1)$ . Если она не может этого сделать, например для  $n > 2$ , она создает в памяти копию Func с параметрами  $(A,n-1)$ , из которой затем вызывается  $Func(A,n-2)$ . Если, вызвав  $Func(A,n-2)$ , программа не может ее вычислить, опять создается ее копия, из которой вызывается  $Func(A,n-3)$ . И так продолжается до тех пор, пока значение аргумента  $n$  в копии Func не окажется равным 1, и программа сможет вычислить  $Func(A,1)$ . Теперь программа возвращается обратно к предыдущей копии и вычисляет предыдущую копию  $Func(A,2)$ . Последовательно возвращаясь к предыдущей копии, она вычисляет результат  $Func(A,n)$ .

Как и функция Func, компонента Recur создает копии подчиненного ей подграфа работ до тех пор, пока не сможет его вычислить. После этого вычисляются предыдущие копии подграфа в последовательности, обратной к последовательности их создания копированием.

### 3. Метод прогонки

Решение системы уравнений

$$\begin{aligned} c_0 u_0 - b_0 u_1 &= f_0, \\ -a_i u_{i-1} + c_i u_i - b_i u_{i+1} &= f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ -a_N u_{N-1} + c_N u_N &= f_N, \end{aligned} \tag{1}$$

при условиях

$$|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad |c_0| \geq |b_0|, \quad |c_N| \geq |a_N| \tag{2}$$

находится методом правой прогонки как рекуррентная последовательность  $u_i$ :

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}; \quad i = N-1, N-2, \dots, 0; \quad u_N = \frac{f_N + a_N \beta_N}{c_N - a_N \alpha_N}, \tag{3}$$

где

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (4)$$

$$\alpha_1 = c_0^{-1} b_0, \quad \beta_1 = c_0^{-1} f_0.$$

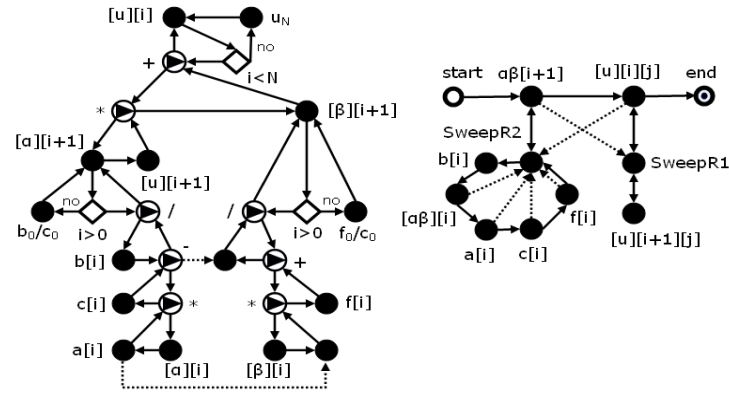


Рис. 2. Граф работ метода правой прогонки

Эти вычисления выполняет граф на рис. 2.1 или его агрегированный аналог на рис. 2.2. Нетрудно построить графы работ для левой и других прогонок.

Компоненты  $a[i]$ ,  $b[i]$ ,  $c[i]$ ,  $f[i]$  вычисляют одноименные в (1)-(4) параметры  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Разнообразие задач, решаемых методами конечных разностей и прогонки, например, задач теплопроводности, диффузии, порождает большое разнообразие зависимостей этих параметров от  $i$ . Поскольку концепция сетевой библиотеки не предусматривает для сетевого пользователя неконтролируемую возможность самому программировать формулы, разнообразие таких зависимостей в системе определяется набором дополнительных компонент, с помощью которых можно изменить собственную функциональность компонент-параметров  $a[i]$ ,  $b[i]$ ,  $c[i]$ ,  $f[i]$ . Для этого сетевой пользователь подчиняет дополнительные компоненты компонентам-параметрам, включая их в граф, например, так, как показано на рис. 3. Теперь работа, например компоненты  $b[i]$ , заключается в исполнении работ подчиненными дополнительными компонентами  $a_w[i]$ ,  $A_{a2}[i]$ ,  $a_a[i]$ ,  $A_{w2}[i]$  и в получении значения коэффициента  $\tilde{b}_{\psi,i}$  уравнения (12).

Компонента  $\alpha\beta[i+1]$  помещает в массивы  $\alpha[]$  и  $\beta[]$  значения  $\alpha[i+1]$  и  $\beta[i+1]$ , рассчитываемые компонентой SweepR2 согласно (4). Если компоненты  $a[i]$ ,  $b[i]$ ,  $c[i]$ ,  $f[i]$  уточняются подчиненными компонентами, как, например, на рис. 3, их значения вычисляются согласно методу уточнения; в противном случае  $a[i] \dots f[i]$  равны постоянным, заданным пользователем при инициализации компонент.

Если неизвестно значение  $\alpha\beta[i]$ , необходимое для вычисления  $\alpha\beta[i+1]$ , компонента  $\alpha\beta[i]$  замещается копией подграфа, подчиненного  $\alpha\beta[i+1]$ , с параметром  $i$  вместо  $i+1$  до тех пор, пока  $i$  не окажется равным 1. Тогда  $\alpha\beta[1]$  вычисляет  $\alpha[1]=c_0^{-1}b_0$ ,  $\beta[1]=c_0^{-1}f_0$ , и начинается вычисление предыдущих копий подграфа, т.е. прогонка по формулам (4).

После вычисления  $\alpha[i]$  и  $\beta[i]$  для  $i=1, \dots, N$  обратной прогонкой аналогично вычисляется последовательность  $u[i]$ . Компонента SweepR1 вычисляет значение  $u_i = \alpha_{i+1}u_{i+1} + \beta_{i+1}$  и передает компоненте  $u[i+1]$ , которая помещает его в массив  $u[]$ .

#### 4. Двухфазная модель течения воды и воздуха в пористой среде

Рассмотрим пористую среду (почву), в порах которой протекают две «жидкости»: вода плотности  $\rho_w$  и воздух плотности  $\rho_a$ . Пусть вода занимает долю  $\theta_w$  единичного объема среды, а воздух – долю  $\theta_a$ . Обозначим через  $\theta_p$  долю пор в объеме среды. Тогда  $\theta_w + \theta_a = \theta_p$ , плотность водной фазы равна  $\theta_w\rho_w$ , а плотность воздушной фазы –  $\theta_a\rho_a$ . Пусть в водной фазе растворены ионы вида  $p=\{Na^+, Ca^{2+}, \dots\}$  с концентрациями  $C_p$ , кг-р/кг-Н<sub>2</sub>O. Малый объем  $\delta V_\alpha(t)$   $\alpha$ -фазы движется так, что сохраняется его масса, т.е. на траектории движения выполняются равенства

$$\frac{d}{dt} \int \theta_w \rho_w dV_w = - \int e_w dV_w, \quad \frac{d}{dt} \int \theta_a \rho_a dV_a = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \int \theta_w \rho_w C_p dV_w = - \oint \bar{j}_p d\bar{\sigma} + \int F_p dV_w.$$

Здесь  $j_p$  – диффузионный поток ионов вида  $p$  из объема  $\delta V_w(t)$  через элемент его поверхности  $d\bar{\sigma}$ ,  $F_p$  – функция источника ионов. Положив  $\hat{\rho}_\alpha = \rho_\alpha / \rho_{w0}$ , где  $\rho_{w0}$  – плотность  $\rho_w$  воды в нормальных условиях, получим дифф.-алгебраическую систему

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_\alpha \hat{\rho}_\alpha) + \text{div}(\hat{\rho}_\alpha \bar{J}_\alpha) = f_\alpha, \quad \bar{J}_\alpha = -k_\alpha \nabla(\psi_\alpha - \hat{\rho}_\alpha \bar{d}_z \bar{r}); \quad (6)$$

$$\theta_w \frac{\partial}{\partial t} C_p + \bar{J}_w \nabla C_p + \text{div}(D_p \nabla C_p) = \rho_w^{-1} F_p; \quad (7)$$

$$\theta_a + \theta_w = \theta_p, \quad \psi_a - \psi_w = \psi_c(\theta_w); \quad (8)$$

$$\hat{\rho}_\alpha = \hat{\rho}_\alpha(\psi_\alpha), \quad k_\alpha = k_\alpha(\theta_w), \quad \alpha \in \{w, a\};$$

$$\psi_w < 0, \quad \psi_c > 0, \quad \partial \psi_c / \partial \theta_w < 0.$$

Дифференцируя  $\partial(\theta_\alpha \rho_\alpha) / \partial t$  по независимым переменным  $\theta_w$  и  $\psi_w$  и усредняя по  $[z_{i-1/2}, z_{i+1/2}]$ , получим

$$A(\theta_w, \psi_w)_i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_w \\ \psi_w \end{bmatrix}_i + \tilde{h}_i^{-1} \begin{bmatrix} J_{w,i+1/2} - J_{w,i-1/2} \\ J_{a,i+1/2} - J_{a,i-1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_w \\ f_a \end{bmatrix}_i, \quad (9)$$

где



$$J_{\alpha,i-1/2} = -\bar{k}_{\alpha,i-1/2} \left( \frac{\psi_{\alpha,i} - \psi_{\alpha,i-1}}{h_i} \psi_{\alpha} - \hat{\rho}_{\alpha,i-1/2} \right),$$

$$A(\theta_w, \psi_w)_i = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_w & \theta_w \frac{\partial \hat{\rho}_w}{\partial \psi_w} \\ \theta_a \frac{\partial \hat{\rho}_a}{\partial \psi_a} \frac{\partial \psi_c}{\partial \theta_w} - \hat{\rho}_a & \theta_a \frac{\partial \hat{\rho}_a}{\partial \psi_a} \end{bmatrix}_i, \quad (10)$$

или (11)

$$A_{w1,i} \dot{\theta}_{w,i} + A_{w2,i} \dot{\psi}_{w,i} + (-a_{w,i} \psi_{w,i-1} + c_{w,i} \psi_{w,i} - b_{w,i} \psi_{w,i+1}) + d_{w,i} = f_{w,i};$$

$$A_{a1,i} \dot{\theta}_{a,i} + A_{a2,i} \dot{\psi}_{a,i} + (-a_{a,i} \psi_{a,i-1} + c_{a,i} \psi_{a,i} - b_{a,i} \psi_{a,i+1}) + d_{a,i} = f_{a,i},$$

где  $A_{\alpha j,i}$  –  $j$ -я компонента строки  $\alpha$  матрицы  $A(\theta_w, \psi_w)$  из (3) в точке  $z_i$ .  
Здесь  $\alpha = w$  соответствует первой,  $\alpha = a$  – второй строке  $A(\theta_w, \psi_w)$ . Условиями сопряжения на границе слоев полагаем непрерывность потенциалов  $\psi_{\alpha}$  и потоков  $J_{\alpha}$ .

Положив в (9)  $\dot{\psi}_{w,i} \approx \tau^{-1}(\psi_{w,i}^{j+1} - \psi_{w,i}^j)$ ,  $\dot{\theta}_{w,i} \approx \tau^{-1}(\theta_{w,i}^{j+1} - \theta_{w,i}^j)$ , получим систему (12)-(13), которую будем решать методом правой прогонки:

$$-\tilde{a}_{\psi,i} \psi_{w,i-1}^{j+1} + (\tilde{c}_{\psi,i} + |A_i| \tau^{-1}) \psi_{w,i}^{j+1} - \tilde{b}_{\psi,i} \psi_{w,i+1}^{j+1} = \tilde{F}_{\psi,i}, \quad (12)$$

$$\tilde{F}_{\psi,i} = |A_i| \tau^{-1} \psi_{w,i}^j + \tilde{f}_{\psi,i} - \tilde{d}_{\psi,i}, \quad \theta_{w,i}^{j+1} = \theta_{w,i}^j + \tau |A_i|^{-1} \tilde{F}_{\theta,i},$$

$$\tilde{F}_{\theta,i} = (\tilde{a}_{\theta,i} \psi_{w,i-1}^{j+1} - \tilde{c}_{\theta,i} \psi_{w,i}^{j+1} + \tilde{b}_{\theta,i} \psi_{w,i+1}^{j+1}) + \tilde{f}_{\theta,i} - \tilde{d}_{\theta,i}, \quad (13)$$

где

$$\tilde{a}_{\psi,i} = a_{w,i} A_{a2,i} - a_{a,i} A_{w2,i}, \quad \tilde{b}_{\psi,i} = b_{w,i} A_{a2,i} - b_{a,i} A_{w2,i}, \quad \tilde{c}_{\psi,i} = \tilde{a}_{\psi,i} + \tilde{b}_{\psi,i};$$

$$\tilde{d}_{\psi,i} = d_{w,i} A_{a2,i} - d_{a,i} A_{w2,i}, \quad \tilde{f}_{\psi,i} = f_{w,i} A_{a2,i} - f_{a,i} A_{w2,i}; \quad (14)$$

$$\tilde{a}_{\theta,i} = a_{a,i} A_{w1,i} - a_{w,i} A_{a1,i}, \quad \tilde{b}_{\theta,i} = b_{a,i} A_{w1,i} - b_{w,i} A_{a1,i}, \quad \tilde{c}_{\theta,i} = \tilde{a}_{\theta,i} + \tilde{b}_{\theta,i};$$

$$\tilde{d}_{\theta,i} = d_{a,i} A_{w1,i} - d_{w,i} A_{a1,i}, \quad \tilde{f}_{\theta,i} = f_{a,i} A_{w1,i} - f_{w,i} A_{a1,i}; \quad (15)$$

$$a_{\alpha,i} = \tilde{h}_i^{-1} h_i^{-1} \bar{k}_{\alpha,i-1/2}, \quad b_{\alpha,i} = \tilde{h}_i^{-1} h_{i+1}^{-1} \bar{k}_{\alpha,i+1/2}, \quad c_{\alpha,i} = a_{\alpha,i} + b_{\alpha,i};$$

$$d_{\alpha,i} = \tilde{h}_i^{-1} (\bar{k}_{\alpha,i+1/2} \hat{\rho}_{\alpha,i+1/2} - \bar{k}_{\alpha,i-1/2} \hat{\rho}_{\alpha,i-1/2}), \quad f_{\alpha,i} = f_{\alpha}(z_i). \quad (16)$$

а  $A_{w1,i}$ ,  $A_{w2,i}$ ,  $A_{a1,i}$ ,  $A_{a2,i}$  – элементы матрицы  $A(\theta_w, \psi_w)$  в точке  $z_i$ ,  $t_j$ .

Систему (12)-(13) решает граф работ на рис. 3, полученный методом уточнения графа на рис. 2. Имена компонент графа отвечают обозначениям (12)-(13) и приводятся здесь без скобок. Имена ссылочных компонент опущены. Очевидно, можно упрощать граф, агрегируя его компоненты.

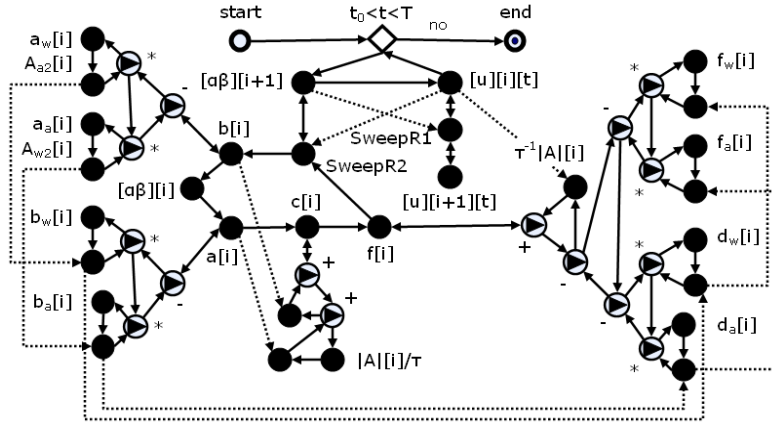


Рис. 3. Граф работ для решения двухфазной модели

### 5. Уравнение Ричардса

Рассмотрим частный случай (9), когда  $\partial \hat{\rho}_w / \partial \psi_w = 0$ ,  $\psi_a = Const$ . Тогда  $\rho_w = 1$ , а  $\theta_w$  становится зависимой от  $\psi_w$  в силу  $\psi_a - \psi_w = \psi_c(\theta_w)$ . Дифференцируя последнее по  $\psi_w$ , из (9) получим уравнение Ричардса в полудискретной форме (9)

$$r(\psi_w) \frac{d}{dt} \psi_{w,i} + \tilde{h}_i^{-1} (J_{w,i+1/2} - J_{w,i-1/2}) = f_{w,i}, \quad r(\psi_w) = -\frac{\partial \theta_w}{\partial \psi_c}. \quad (17)$$

Полагая  $\dot{\psi}_{w,i} \approx \tau^{-1} (\psi_{w,i}^{j+1} - \psi_{w,i}^j)$ , применим разностную схему

$$r(\psi_{w,i}^j) \tau^{-1} (\psi_{w,i}^{j+1} - \psi_{w,i}^j) + \tilde{h}_i^{-1} (J_{w,i+1/2}^{j+1} - J_{w,i-1/2}^{j+1}) = f_{w,i}^j, \quad (18)$$

из которой с помощью (10) получим систему, решаемую методом правой прогонки

$$-a_{w,i} \psi_{w,i-1}^{j+1} + (c_{w,i} + r_i^j \tau^{-1}) \psi_{w,i}^{j+1} - b_{w,i} \psi_{w,i+1}^{j+1} = F_{w,i}^j, \quad (19)$$

где

$$a_{w,i} = \tilde{h}_i^{-1} h_i^{-1} \bar{k}_{w,i-1/2}, \quad b_{w,i} = \tilde{h}_i^{-1} h_{i+1}^{-1} \bar{k}_{w,i+1/2}, \quad c_{w,i} = a_{w,i} + b_{w,i};$$

$$F_{w,i}^j = r_i^j \tau^{-1} \psi_{w,i}^j + f_{w,i}^j - d_{w,i}^j, \quad f_{w,i}^j = f_w(z_i, t_j),$$

$$d_{w,i} = \tilde{h}_i^{-1} (\bar{k}_{w,i+1/2} \hat{\rho}_{w,i+1/2} - \bar{k}_{w,i-1/2} \hat{\rho}_{w,i-1/2}).$$

Система (19) решается следующим графом работ, полученным из графа на рис. 2 методом уточнения аналогично графу на рис. 3.

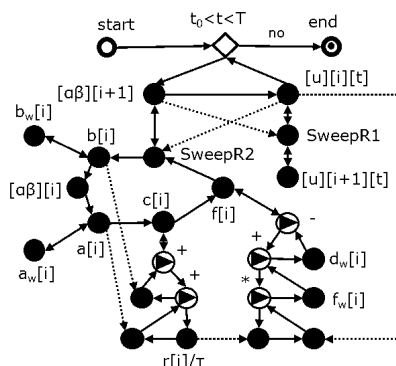


Рис. 4. Граф работ для решения уравнения Ричардса

### Благодарности

Благодарю проф. В.А. Серебрякова, чл.-кор. РАН И.Г. Поспелова и Ю.Н. Павловского, проф. А.М. Тарко, канд. физ.-мат. наук А.А. Бездушного (ВЦ РАН), д-ра физ.-мат. наук Л.Н. Столярова (МФТИ) за обсуждение, критические замечания и внимание к работе.

### Литература

1. Воротынцев А.В. Концепция сетевых информационно-вычислительных библиотек моделей. – М.: Изд-во ВЦ РАН, 2009. 109 с.
2. Воротынцев А.В. О представлении вычислимых моделей графами работ // Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и биотехнологий «ЭКОМОД–2010»: тр. V Всерос. науч. конф. Киров, 5–11 июля 2010. Киров, 2010. С. 45–54.
3. Воротынцев А.В. Представление вычислимых моделей иерархическими автоматами в сетевой библиотеке // Вестник БГУ. 2011. Вып. 9. С. 87-88.
4. Воротынцев А.В. Некоторые характерные графы работ для представления сценариев расчета математических моделей // Вестник БГУ. 2012. Вып. 9. С. 147-153.
5. Кознов Д.В. Основы визуального моделирования. М.: Интернет-университет информационных технологий БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 246 с.

*Воротынцев Александр Васильевич*, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник ВЦ РАН, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40, тел.: 8965-135-3931, e-mail: avv\_alexv@mail.ru.

*Vorotyntsev Alexander Vasilievich*, candidate of physical and mathematical sciences, research fellow, CC RAS, Vavilov str. 40, 117967, Moscow, ph.: +7965-135-3931, e-mail: avv\_alexv@mail.ru.

УДК 519.65

© Р.А. Данеев

### ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАЗМЕЩЕНИИ ПЭВМ НА КВАЗИФРАКТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе рассмотрен вариант квазифрактальной области пространственной ориентации ПЭВМ. Такое размещение ПЭВМ (планировка рабочего стола) необходимо в целях защиты от несанкционированного сканирования ее электромагнитного поля, в частности, монитора как канала передачи конфиденциальной информации, не содержащего криптографический протокол.

**Ключевые слова:** фрактал, ковер Серпинского, электромагнитная скрытность ПЭВМ.

© Р.А. Данеев

### ON OPTIMUM PLACEMENT OF PC AT QUASIFRACTAL SURFACE

In the work the option of quasifractal area of spatial orientation of PC is considered. Such placement of PC (desktop planning) is necessary for protection from unauthorized scanning of its electromagnetic field, in particular, the monitor as a channel of transfer of confidential information, not containing the cryptographic protocol.

**Keywords:** fractal, Sierpinski's carpet, electromagnetic reserve of PC.

#### Введение

Важная задача апостериорного математического моделирования сложных физико-технических систем – распознавание электромагнитного источника излучения поля (ИИП); например, минимизация взвешенно-средней электромагнитной наблюдаемости в фиксированных (потенциально возможных) точках пеленгации электромагнитных сигналов элементов коммутационной компоновки ПЭВМ [1] (данная постановка отвечает задаче электронной защиты коммутаторов ПЭВМ при несанкционированном сканировании их побочных электромагнитных излучений-наводок).

В техническом плане проще всего решается перехват «конфиденциального канала» ПЭВМ, отображаемого на экран её дисплея, при этом векторная полевая структура «канала» описывается уравнениями Максвелла [2, с. 53]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon E) &= 4\pi\rho, \operatorname{rot}E = -c^{-1}\partial(\mu H)/\partial t, \\ \operatorname{div}(\mu H) &= 0, \operatorname{rot}H = c^{-1}\partial(\varepsilon E)/\partial t + 4\pi c^{-1}I. \end{aligned}$$

Если всмотреться в уравнения *статики* уравнений электромагнетизма Максвелла, то обнаружим, что для физических свойств электромагнитного поля два предмета, электростатика и магнитостатика, являются идеальными математическими объектами, в итоге объединяющими электричество и магнетизм. Электростатика – суть чистый пример векторного поля с *нулевым ротором* и *заданной дивергенцией*, магнитостатика – чистейший пример поля с *нулевой дивергенцией* и *заданным ротором*; таким образом, напряженность электростатического поля  $E$  точки  $(x_1, y_1, z_1)$  от единичного заряда, расположенного в  $(x_2, y_2, z_2)$ , – это вектор с координатами  $(E_x, E_y, E_z)$ :

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_1 - x_2) / \left( (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right)^{3/2}, [x, y, z] \quad (1)$$

$\lambda = \text{const}$ , скобка  $[x, y, z]$  означает, что два невыписанных соотношения получают круговой перестановкой в уравнении (1) элементов этой скобки. Как следствие, первый шаг моделирования координат ИИП состоит в том, чтобы начать с апостериорного моделирования электростатики и пусть приближенно, но «узнать» тем самым всё про дивергенцию поля ИИП; магнитостатику и ротор можно рассматривать как очевидную симметрию.

### 1. Моделирование квазифрактальной поверхности ковра Серпинского

В практических рассмотрении оптимальной ориентации ПЭВМ, как правило, присутствует геометрическое требование, чтобы задача решалась в постановке, когда область размещения  $Q$  обладает запретными зонами со сложной геометрической структурой; т.е. область установки ПЭВМ, по существу, образует *квазифрактал*. Ясно, что физико-техническая природа «запретных зон» как геометрических объектов определяется специальными местами установки другого технологического оборудования, проходами между рабочими столами персонала, а также специфическими ограничениями на каждом рабочем столе. При этом возможен вариант, когда стационарная точка лежит в «запретной зоне» и, следовательно, решение для установки ПЭВМ нужно искать на границе этой запретной зоны.

Геометрические объекты, которые сейчас принято называть *фракталами*, впервые появились в математике [3, 4] при топологическом развитии таких понятий, как «линия», «плоская фигура» и т.п. К ним относятся фигуры, которые нельзя назвать в полном смысле слова ни линией<sup>1</sup>, ни

---

<sup>1</sup> Примером такого математического объекта является «пушистая линия Коха», названная в честь датского математика Коха. Она получается из отрезка прямой последовательной заменой каждого прямоугольного участка на ломанную путем «вытягивания» средней трети исходного отрезка до равностороннего треугольника. Повторяя такую процедуру

плоской фигурой (см. ниже в примерах 2,3 геометрические конструкции «салфетки Серпинского» и «ковра Серпинского»). При этом строго определить фрактал (при существующем в настоящее время многообразии его эмпирических форм) как формальный математический объект не удастся, есть лишь менее или более удачные попытки дать такое определение. Наиболее известными являются определения ученого-математика Бенуа Мандельброта, благодаря работам которого стало ясно, насколько важны эти новые геометрические объекты для понимания геометрической структуры окружающего мира<sup>2</sup>.

В основе первого определения фрактала лежит представление о *топологической размерности* множества [5, с. 559].

**О п р е д е л е н и е 1** [6, с. 128]. *Фрактал – это множество, у которого размерность Хаусдорфа-Безиковича строго больше его топологической размерности.*

Математическую конструкцию размерности Хаусдорфа-Безиковича дадим ниже в определении 3, здесь лишь заметим, что под определение 1 подпадают, в частности, такие «пушистые линии», как кривая Коха. Стоит отметить, что, как полагал Мандельброт, дробность размерности выражает «пограничное свойство» фракталов лежать между точкой и линией, или между линией и поверхностью и т.д.; при этом топологическая размерность точки = 0, линии = 1, плоскости = 2 и т.п., – теорема 7.3.19 [5, с. 598].

Неудачность определения 1 стала очевидной после приведения ряда контрпримеров геометрических объектов (см. ниже примеры 2-4), для которых это определение не выполняется, хотя имело бы смысл их отнести (исходя из интуитивного представления) к фракталам. Так пример 4 – чрезвычайно «дырявая пирамида», построенная польским математиком, Вацлавом Серпинским, формально имеет размерность 2, но строится из трехмерного тетраэдра поочередным отбрасыванием вписанных в него тетраэдров с половинной стороной.

Несколько менее формальное и значительно более общее определение фрактала, данное Б. Мандельбротом несколько позже, звучит так<sup>3</sup>:

---

бесконечное число раз, в пределе получим *ограниченную* «линию», соединяющую две точки, но имеющую *бесконечную* длину.

<sup>2</sup> Сначала фракталы воспринимались как некоторая экзотика. Казалось, не бывает в природе объектов, для которых адекватной моделью является линия с бесконечной длиной или объемная фигура с нулевым объемом. Но такие «реальные» объекты, как речная сеть на поверхности Земли, структура разломов в горных породах, следы, оставляемые в диэлектрике высоковольтным разрядом при пробое, скопление молекул, осаждаемых из раствора (они выглядят как длинные разветвленные «мохнатые цепочки» типа кораллов или снежинок), – это всё примеры природных фракталов.

<sup>3</sup> Неопределенность данного определения фрактала, как *формальной* математической структуры, содержащаяся в словах «в некотором смысле», делает это понятие, чуть не «всеобъемлющим»; как и при неудачной попытке Кантора дать формальное непротиворечивое определение понятия *множества*.

**О п р е д е л е н и е 2** [6, с. 128]. *Фракталом называется математический объект (структура), состоящий из частей, которые в некотором смысле подобны целому.*

Поясним, как в это определение укладываются фракталы типа пушистой линии Коха. Вначале заметим, что такие объекты, как прямая или плоскость, разумно назвать *самоподобными*. Формально охарактеризовать это свойство можно тем, что эти фигуры не изменяются при геометрических преобразованиях: перенос прямой вдоль нее приводит к той же самой прямой, плоскость переходит в себя при параллельном сдвиге и повороте. Независимость от преобразования называется *симметрией*. Есть множества, не обладающие столь полной симметрией, как прямая или плоскость, например, окружность не изменяется только при повороте (тем самым она тоже самоподобна). В этом смысле, согласно определению 2, все эти множества являются фракталами, несмотря на свою простую геометрическую структуру; их можно назвать «гладкими фракталами», в отличие от кривой Коха, пирамиды Серпинского, множества Кантора и т.п.

Какой же симметрией обладает кривая Коха? Выбрав ее фрагмент, например одну треть всей кривой, и увеличив его в три раза, вновь получим в точности исходную кривую. Физики говорят: такие объекты обладают *скейлингом*, от слова *scale* – шкала (изменить шкалу в три раза – это всё равно, что рассматривать исходный объект под микроскопом с трехкратным увеличением). Если вновь видим ту же картину, что и без микроскопа, значит, объект обладает скейлингом и таким образом эмпирически является фракталом.

Вернемся к определению 1 и для характеристики размерности Хаусдорфа-Безиковича рассмотрим ряд широко известных примеров.

Вначале зададимся вопросом: как измерить «величину» фиксированного множества  $Q$  метрического пространства? С этой целью разобьем  $Q$  на «элементарные ячейки» с характерным размером (диаметром)  $r$  и подсчитаем минимальное число  $N(r)$ , покрывающих все множество  $Q$ . Уменьшая размер ячеек (следа за скоростью возрастания их числа, необходимого для покрытия множества  $Q$ ), можно получить представление о размерности множества  $Q$ , в частности, вычислить такие характеристики, как «длина» множества<sup>4</sup>, его «площадь», «объем» и т.п. В этом смысле конструкция размерности Хаусдорфа-Безиковича определяет «скорость роста» числа элементов минимального покрытия множества  $Q$  при стремлении характерного размера к нулю.

---

<sup>4</sup> Действительно, пусть  $Q$  – спрямленная кривая длины  $L$ . Выберем минимальное покрытие, т.е. такое, которое состоит из наименьшего числа ячеек (существование такого покрытия для компактного множества следует из леммы Гейне-Бореля [7, с. 98]). Число ячеек  $N(r)$  в этом покрытии будет пропорционально отношению  $L/r$ , и длину кривой получим предельным переходом при  $r \rightarrow 0$ :  $L \approx N(r)r$ .

**О п р е д е л е н и е 3** [6, с. 133]. Число  $d$ , характеризующее минимальное покрытие  $Q$ , и такое, что для него справедливо соотношение

$$d = \lim \left\{ \ln N(r) / \ln(r^{-1}) : r \rightarrow 0 \right\}, \quad (2)$$

называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича множества  $Q$ .

Вычислим размерности (2) для множеств, которые являются фракталами (три последние из них не подпадают под определение 1).

**П р и м е р 1.** *Размерность кривой Коха.* При  $r=1/3$  число элементов минимального покрытия равно  $N(r)=4$ , а при  $r = (1/3)^n$  – соответственно  $N(r) = 4^n$ . Поэтому, согласно формуле (2), размерность Хаусдорфа-Безиковича ломаной Коха равна

$$d = \ln 4 / \ln 3 > 1.$$

Топологическая размерность фигур из двух следующих примеров равна 2 (т.к. они получены из плоской фигуры), что с учетом (2) исключает для них конструкцию определения 1.

**П р и м е р 2.** *Размерность салфетки Серпинского.* Вацлав Серпинский предложил пример скейлинга как «плоского» фрактального множества, получаемого из правильного треугольника последовательным выбрасыванием средних частей (рис. 1).



Рис. 1. Построение салфетки Серпинского

Размерность салфетки Серпинского легко подсчитать по формуле (2), выбирая в качестве элемента покрытия правильный треугольник со стороной  $r = (1/2)^n$ . Тогда  $N(r) = 3^n$ , и, значит,

$$1 < d = \ln 3 / \ln 2 < 2.$$

**П р и м е р 3.** *Размерность ковра Серпинского.* Это плоская фрактальная фигура, полученная алгоритмическим способом, аналогичным при получении скейлинга типа «салфетки Серпинского», но начальным элементом здесь является единичный квадрат (рис. 2).





Рис. 2. Построение ковра Серпинского

При построении ковра Серпинского на первом шаге единичный квадрат делится на девять равновеликих маленьких квадратов с длиной стороны, равной  $r=1/3$ , при этом выбрасывается центральный квадрат (рис. 2), и процедура повторяется с оставшимися квадратами бесконечное число раз. Таким образом, размерность «ковра» равна

$$1 < d = \ln 8 / \ln 3 < 2.$$

Следующий пример показывает, что такой качественный показатель, как *дробная размерность* Хаусдорфа-Безиковича, продемонстрированная примерами 1-3, также не может выступать признаком фрактала.

**Пример 4. Размерность пирамиды Серпинского.** Пирамида Серпинского – это объемная фрактальная фигура, полученная рекурсивным способом, аналогичным способу получения плоской салфетки Серпинского; начальным элементом является правильный тетраэдр с единичной длиной ребра. В данном случае фигура получается из тетраэдров, последовательно отсекаемых от вершин исходного тетраэдра, при этом стороны отсекаемых тетраэдров равны половине стороны тех тетраэдров, от которых они отбрасываются (далее процесс циклически повторяется). Если элемент покрытия – тетраэдр с длиной стороны  $r = (1/2)^n$ , то требуется  $N(r) = 4^n$  элементов покрытия, что приводит к размерности, равной 2 (целое число), хотя назвать его размерностью «плоского объекта» вряд ли можно.

## 2. Определение оптимальных координат установки ИИП

Вернемся к основной линии изложения – определению оптимальных координат установки ИИП в постановке, когда область размещения – скейлинг. В качестве геометрической модели рассмотрим фрактал ковра Серпинского (ФКС). В данном случае координаты установки ИИП не могут выступать в качестве решения задачи ее размещения, поэтому решение необходимо искать на границе  $G$  «квадрата изъятого» в центре ФКС ( $n=1$ , рис. 4); аналогичное решение строится для любого «пустого» квадрата ФКС при  $n>1$ .

Пусть  $\omega \in R^m$  – фиксированный вектор пространственно-угловых координат ИИП. Выделим класс многомерных нелинейных систем типа «вход-выход», описываемых векторно-тензорным уравнением регрессии вида [8]:

$$\hat{w}(\omega+v)=c+\text{col}(\sum_{j=1,2} f_1^{j,m}(v,\dots,v),\dots, \dots,\sum_{j=1,2} f_n^{j,m}(v,\dots,v))+\varepsilon(\omega,v), \quad (3)$$

$\hat{w}(\omega+v)\in R^n$ ,  $v\in R^m$ ,  $c\in R^n$ ,  $f_i^{j,m}\in T_m^j$ ,  $\varepsilon(\omega,\cdot): R^m\rightarrow R^n$ ,  $\|\varepsilon(\omega,v)\|_{R^n}=o(v_1^2+\dots+v_m^2)$ ,  $v=\text{col}(v_1,\dots,v_m)$ .

Пусть  $\{b_i\}_{1\leq i\leq n}\subset R^3$  – комплекс точек возможного несанкционированного зондирования электромагнитного сигнала ИИП,  $v\in R^m$  – вектор пространственной ориентации ИИП (с началом в  $\omega$ ),  $w(\omega+v)$  – вектор выходных сигналов ИИП (интенсивность электромагнитного поля ИИП в точках  $b_i$ ,  $1\leq i\leq n$ ).

С этой целью рассмотрим численное решение задачи оптимизации:

$$\min\{F^*(x,z):=\sum_{i=1,\dots,4} w_i(x,z):(x,z)\in G\}. \quad (4)$$

Пусть  $L$  – длина контура  $G$ ,  $h=0.01L$  и  $(x_j,y_j), j=0,\dots,100$  – точки контура  $G$ , у которых расстояние между соседними точками вдоль контура  $G$  равно  $h$ . В соответствии с построениями из [8] будем иметь:

$$F^*(x,z)=w_1(x,z)+w_2(x,z)+w_3(x,z)+w_4(x,z)= \\ = (x^2+z^2)^{-1} + (x^2+(1-z)^2)^{-1} + ((1-x)^2+(1-z)^2)^{-1} + \\ + ((1-x)^2+z^2)^{-1},$$

что позволяет ввести [9, с. 151] кубическую сплайн-функцию  $F^\# \rightarrow: [0,L] \rightarrow R$

$$F^\#(jh)=F^*(x_j,z_j), j=0,\dots,100. \quad (5)$$

Ясно, что если под «квазифракталом ковра» понимать структуру ковра Серпинского при фиксированном  $n$ , то шаг сетки (5) имеет ограничение  $h\leq (r/9)^n$ .

Таким образом, задачу оптимизации (4) можно трансформировать к новой задаче:

$$\min\{F^\#(y): y\in [0,L]\},$$

или в координатах стационарных точек у  $F^\#(y)$  – к корням уравнения [10, с. 131]:

$$dF^\#(\cdot)/dy=0. \quad (6)$$

Графики функций  $F^\#(\cdot)$ ,  $dF^\#(\cdot)/dy$  приведены на рис.3, 4; построение осуществлено с использованием программного комплекса «ОРИЭП» [11].

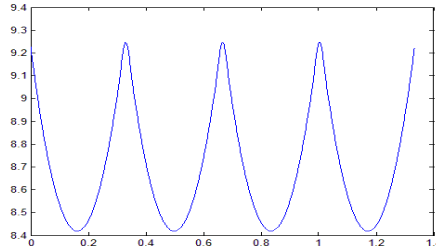


Рис. 3. График функции  $F^\#(\cdot)$

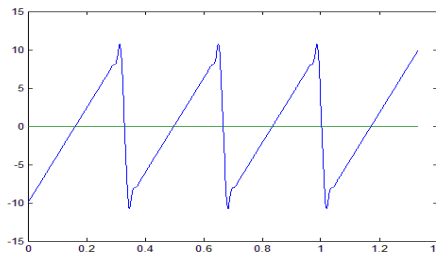


Рис. 4. График функции  $dF^\#(\cdot)/dy$

В соответствии с соотношениями (5) для сплайн-функции  $F^\#(\cdot)$  на сетке  $h=0.01L$ ,  $(x_j, y_j)$ ,  $j=0, \dots, 100$  задача оптимизации (4)-(6) имеет единственное (!) решение в точках контура  $G$  с координатами:

$$\begin{aligned} (x^*, y^*) &= (0.4949, 0.3333), & (x^*, y^*) &= (0.6667, 0.4983), \\ (x^*, y^*) &= (0.4983, 0.6667), & (x^*, y^*) &= (0.3333, 0.4949). \end{aligned}$$

### Заключение

В работе исследовано нелинейное регрессионное моделирование задачи электромагнитного сканирования ИИП; метод разработан в [1] и отличается от известных тем, что использует аппарат тензорного описания апостериорной модели ИИП.

В развитие данной постановки предложен метод решения задачи оптимизации на областях, получивших в последнее время геометрическое представление в терминах фрактальных объектов [3, 4]. Показано, что данная задача, по существу, сводится к построению вещественнозначной функции вещественного аргумента с применением варианта сплайн-метода (кубического с равномерной сеткой на отрезке), что позволяет алгоритмически использовать существенно меньшую размерность по отношению к исходной плоской задаче оптимизации. При этом остался открытым вопрос: как найти решение *общей задачи оптимизации* заданного нелинейного функционала (включая вариант с невыпуклой формой) на реальном («не квази») фрактале; например, как частный случай, на по-

верхности ковра Серпинского при  $n \rightarrow \infty$  («ковер» с 0-площадью и размерностью Хаусдорфа-Безиковича =  $\ln 8 / \ln 3$ ).

### Литература

1. Нелинейный регрессионно- тензорный анализ оптимальной установки электромагнитного источника излучения при несанкционированном сканировании его электромагнитного поля / В.А. Козырев и др. // Известия вузов. Приборостроение. 2010. Т. 53. № 10. С. 10-17.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
3. Шустер П. Динамический хаос. М.: Мир, 1988. 382 с.
4. Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа прорывных технологий в современных радиосистемах // Р. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006. С. 374-457.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
6. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 296 с.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
8. Русанов В.А., Данеев Р.А. Робастно-адаптивная настройка алгоритма электромагнитной защиты ПЭВМ // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2013. № 1. С. 13-19.
9. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.
10. Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1972. 424 с.
11. Оптимальное размещение источника электромагнитного поля «ОРИЭП» / Д.Ю. Шарпинский, В.А. Русанов, Р.А. Данеев // Свидетельство Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам о государственной регистрации программы для ЭВМ, № 2010613002 от 06.05.2010 г.

*Данеев Роман Алексеевич*, аспирант, Иркутский государственный университет путей сообщения, 664049, г. Иркутск, тел.: 89246010219, e-mail: [romasun@mail.ru](mailto:romasun@mail.ru).

*Daneev Roman Alexeevich*, postgraduate student, Irkutsk State University of Railway Transport, 664049, Irkutsk, ph.: 89246010219, e-mail: [romasun@mail.ru](mailto:romasun@mail.ru).

УДК 537.523

© *Б.Д. Цыдыпов*

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФФУЗИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ  
СИЛЬНОТОЧНЫХ КАТОДОВ ПЛАЗМОТРОНОВ.  
ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ**

В работе представлены постановка и метод решения нестационарной задачи высокотемпературной диффузии и испарения легирующих элементов с нелинейными граничными условиями для катодных узлов генераторов низкотемпературной плазмы.

**Ключевые слова:** высокотемпературная диффузия, легирующий элемент, термокатод, плазмотрон.

© *B.D. Tsydyrov*

**NONSTATIONARY DIFFUSION PROBLEM FOR HIGH-CURRENT  
CATHODES OF PLASMATRONS.  
STATEMENT AND METHOD OF SOLUTION**

The article deals with the statement and method of solution nonstationary problem of high-temperature diffusion and evaporation of doping components with nonlinear boundary conditions for the cathode units of low-temperature plasma generators.

**Keywords:** high-temperature diffusion, doping components, thermocathode, plasmatron.

**Введение**

Одной из актуальных задач в физике и технике сильноточных плазменных систем (СПС) является проблема повышения ресурса катодных узлов, функционирующих в экстремальных условиях по уровням тепловых потоков и плотностей тока [1]. В последнее время для решения данной проблемы широко используются твердотельные электроды, легированные эмиссионно-активирующими компонентами с малой работой выхода электронов [2]. Однако во время работы из-за высокотемпературной диффузии и интенсивного испарения активаторов снижаются эксплуатационные характеристики катодов данного класса. Исследование динамики этих процессов для оптимизации функциональных режимов СПС представляет собой сложную многопараметрическую задачу.

**Постановка задачи**

Обобщенная диффузионная задача основана на решении системы из трех нестационарных уравнений в двумерном приближении в цилиндрических координатах с нелинейными граничными условиями: уравнений

теплопроводности для всей электродной структуры (катода – тугоплавкой вставки и медного корпуса узла – обоймы), непрерывности тока и диффузии для катода (рис. 1 в [3]). Тепловая задача позволяет определить температурные поля катода  $T_1(r,z)$  и обоймы  $T_2(r,z)$  для корректного учета зависимостей коэффициента диффузии  $D(T)$  и скорости испарения  $w(T)$  при решении уравнения диффузии. Решение тепловой задачи для составного катодного узла представлено в [4].

Двумерное нестационарное уравнение диффузии с учетом нелинейной зависимости коэффициента диффузии от температуры записывается в виде:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r D(T) \frac{\partial n}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(T) \frac{\partial n}{\partial z} \right], \quad (1)$$

$$D(T) = D_0 \exp\left(-\frac{Q_a}{kT}\right).$$

Граничные условия к (1) поставлены следующим образом:

а)  $n(r, z, 0) = n_0$   
 б)  $n(r, L_1, t) = n_0, \quad 0 \leq r \leq R_1$   
 в)  $-D(T) \frac{\partial n(r, 0, t)}{\partial z} = \begin{cases} (1-\eta)(n/n_m)^{2/3} w(T), & 0 \leq r \leq r_0 \\ (n/n_m)^{2/3} w(T), & r_0 < r \leq R_1 \end{cases}$   
 г)  $\frac{\partial n(0, z, t)}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq z \leq L_1$   
 д)  $-D(T) \frac{\partial n(R_1, z, t)}{\partial r} = (n/n_m)^{2/3} w(T), \quad 0 \leq z \leq L_c$   
 $\frac{\partial n(R_1, z, t)}{\partial r} = 0, \quad L_c < z \leq L_1.$

Здесь  $n(r,z,t)$ ,  $D(T)$ ,  $D_0$ ,  $n_0$ ,  $Q_a$  – соответственно концентрация, коэффициент диффузии, фактор диффузии, исходная концентрация и энергия активации легирующего элемента (присадки),  $n_m$  – концентрация частиц основного металла (матрицы) катода,  $w(T)$  – скорость испарения,  $\eta$  – доля атомов присадки, возвратившихся на катод из приэлектродной области в результате ионно-атомного рециклинга [5].

### Метод решения

Уравнение диффузии (1) в рассмотренной выше постановке аналитически не решается, так как является квазилинейным уравнением с переменными коэффициентами. Поэтому для численного решения применяем локально-одномерную схему прогонки метода конечных разностей [6]. Чтобы обойти трудности, связанные с выбором системы единиц измерения, а также в целях универсализации решения, исходное уравнение приводим к безразмерному виду:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = G_1 \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{D} \frac{\partial y}{\partial \tilde{z}}) + G_2 \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{D} \frac{\partial y}{\partial \tilde{r}}), \quad \tilde{D} = \exp(-Q / kT), \quad (2)$$

где

$$y = n / n_0, \quad \tau = t / \tau_0, \quad \tilde{z} = z / L_1, \quad \tilde{r} = r / R_1, \\ \tilde{D} = D / D_0, \quad G_1 = D_0 \tau_0 / L_1^2, \quad G_2 = D_0 \tau_0 / R_1^2.$$

Остановимся на некоторых особенностях поставленной задачи. В данном случае использование явных схем нецелесообразно, так как  $D(T)$  является быстроменяющейся функцией и условие устойчивости таких схем  $\tau \leq h^2 / 2 \max D(T)$  требует очень малого шага  $\tau$  по времени. Поэтому расчет необходимо вести по безусловно устойчивым неявным схемам с весом  $\delta > 0,5$  [7].

Используя пространственно-временную сетку, введенную при решении тепловой задачи [4], с учетом переменности коэффициента  $\tilde{D}(T)$ , производные уравнения аппроксимируем следующим образом (для упрощения записи знак «тильда» опускаем):

$$\left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right)_j \sim y_{i,k}^{j+1} - y_{i,k}^j, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \frac{\partial y}{\partial z} \right] \sim \frac{1}{h_1 / L_1} (D_{i+1/2} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_1 / L_1} - D_{i-1/2} \frac{y_i - y_{i-1}}{h_1 / L_1}), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r D \frac{\partial y}{\partial r} \right] \sim \frac{1}{h_2 / R_1} \left( D_{k+1/2} \frac{y_{k+1} - y_k}{h_2 / R_1} - D_{k-1/2} \frac{y_k - y_{k-1}}{h_2 / R_1} \right) + \\ + \frac{1}{2r_k} (D_{k-1/2} \cdot y_{\bar{r},k} + D_{k+1/2} \cdot y_{r,k}),$$

где  $y_{\bar{r},k} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_2 / R_1}$  – левая разностная производная в точке  $y_k$ ;

$y_{r,k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_2 / R_1}$  – правая разностная производная в точке  $y_k$ .

Коэффициенты  $D_{(i,k)-1/2} = D(x_{i,k} - 0,5h_{1,2})$ ,  $D_{(i,k)+1/2} = D(x_{i,k} + 0,5h_{1,2})$  выбираются из условий второго порядка аппроксимации на полушаге пространственной сетки в точках  $(x_{i,k} - 0,5h_{1,2})$  и  $(x_{i,k} + 0,5h_{1,2})$  соответственно. Это позволяет устранить немонотонность в решении сеточных функций, появляющихся при использовании полных шагов на пространственной сетке. Применяемая схема является абсолютно устойчивой, монотонной, непрерывно дифференцируемой и имеет погрешность аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ .

Уравнение (2) в разностном виде запишется:

$$\begin{aligned}
 y_i^{j+1} - y_i^j &= G_1 \left[ D_{i+1/2} (y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - D_{i-1/2} (y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) \right] / (h_1 / L_1)^2 + \\
 &+ G_2 \left[ D_{k+1/2} (y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}) - D_{k-1/2} (y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) \right] / (h_2 / R_1)^2 + \\
 &+ \frac{G_2}{2r_k} (D_{k-1/2} \cdot y_{\bar{r},k} + D_{k+1/2} \cdot y_{r,k}).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Применяя локально-одномерную схему, вместо уравнения (3) последовательно решаем одномерные задачи с соответствующими граничными условиями

$$y_i^{j+1} - y_i^j = G_1 \left[ D_{i+1/2} (y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - D_{i-1/2} (y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}) \right] / (h_1 / L_1)^2 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 y_k^{j+1} - y_k^j &= G_2 \left[ D_{k+1/2} (y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}) - D_{k-1/2} (y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) \right] / (h_2 / R_1)^2 + \\
 &\frac{G_2}{2r_k} (D_{k-1/2} \cdot y_{\bar{r},k} + D_{k+1/2} \cdot y_{r,k})
 \end{aligned} \tag{5}$$

соответственно по координатам  $z$  и  $r$ .

#### **Расчет по координате $z$**

После несложных преобразований уравнения (4) имеем:

$$D_{i-1/2} \cdot y_{i-1}^{j+1} - (D_{i-1/2} + D_{i+1/2} + 1 / N^2 G_1) y_i^{j+1} + D_{i-1/2} y_{i+1}^j = y_i^j / (N^2 G_1).$$

Обозначив

$$A_i = D_{i-1/2}, \quad B_i = D_{i+1/2}, \quad C_i = D_{i-1/2} + D_{i+1/2} + 1 / (N^2 G_1), \quad F_i = y_i^j / (N^2 G_1),$$

получим разностное уравнение вида:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i.$$

Решение системы алгебраических уравнений такого типа подробно рассмотрено в [4]. Здесь остановимся на деталях аппроксимации граничных условий данной задачи.

После обезразмеривания граничное условие на рабочем торце электрода в разностном виде запишется следующим образом:

$$\frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^j}{h_2 / L_1} = \begin{cases} -\frac{(1-\eta) w_0 L_1 w(N, k) \cdot y_N^{j+1}}{D_0 n_0^{1/3} n_m^{2/3} D_{N-1/2} (y_N^j)^{1/3}}, & 0 \leq r \leq r_0 \\ -\frac{w_0 L_1 w(N, k) \cdot y_N^{j+1}}{D_0 n_0^{1/3} n_m^{2/3} D_{N-1/2} (y_N^j)^{1/3}}, & r_0 < r \leq R_1. \end{cases}$$

Подставив  $y_{N-1}^{j+1} = \alpha_N y_N^{j+1} + \beta_N$  в уравнение, находим значение концентрации  $y_N^j$  на новом временном слое:

$$y_N^{j+1} = \begin{cases} \frac{(1-\eta) D_{N-1/2} \cdot \beta_N}{(1-\alpha_N) D_{N-1/2} + P_1 w(N, k) / (y_N^j)^{1/3}}, & 0 \leq r \leq r_0, \\ \frac{D_{N-1/2} \cdot \beta_N}{(1-\alpha_N) D_{N-1/2} + P_1 w(N, k) / (y_N^j)^{1/3}}, & r_0 < r \leq R_1, \end{cases}$$



где  $P_1 = w_0 h_1 / (D_0 n_0^{1/3} n_m^{2/3})$  – безразмерный параметр;  $w_0$  – скорость испарения присадки при температуре  $T_0$ .

### Расчет по координате $r$

Подставляя в уравнение (5) выражения соответствующих производных из (3), получим

$$y_k^{j+1} - y_k^j = \frac{G_2}{(h_2 / R_1)^2} [D_{k+1/2}(y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}) - D_{k-1/2}(y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1})] + \\ + \frac{G_2}{2k(h_2 / R_1)^2} [D_{k-1/2}(y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) + D_{k+1/2}(y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1})].$$

С учетом соотношения  $M^2 = 1/(h_2/R_1)^2$  имеем

$$y_k^{j+1} - y_k^j = G_2 M^2 \{ D_{k+1/2}(y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}) - D_{k-1/2}(y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) + \\ + \frac{1}{2k} [D_{k-1/2}(y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}) + D_{k+1/2}(y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1})] \}.$$

Раскрывая скобки, приведя подобные члены и обозначив

$$A_k = (2k-1)D_{k-1/2}, \quad B_k = (2k+1)D_{k+1/2}, \\ C_k = (2k+1)D_{k+1/2} + (2k-1)D_{k-1/2} + 2k/(G_2 M^2), \\ F_k = 2k y_k^j / (G_2 M^2), \quad M = R_1/h_2,$$

получим систему разностных уравнений для значения искомой функции  $y_k$  на новом временном слое  $t = t_{j+1}$

$$A_k y_{k-1}^{j+1} - C_k y_k^{j+1} + B_k y_{k+1}^{j+1} = -F_k, \quad 0 < k \leq M,$$

где  $F_k$  – известная функция, определяемая по значениям функции на предыдущем слое  $j$ .

На внутренней границе ( $k = 0$ ) определяются начальные прогоночные коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ . Так как на оси симметрии радиальный поток равен нулю, в уравнении диффузии член  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD \frac{\partial n}{\partial r})$  при  $r \rightarrow 0$  является неопределенностью типа  $0/0$ . Раскрывая эту неопределенность

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD \frac{\partial n}{\partial r}) = 2D \frac{\partial^2 n}{\partial r^2}$$

на оси симметрии для прогонки по  $r$ , получаем следующее разностное уравнение:

$$y_0^{j+1} - y_0^j = 2G_2 D_{0+1/2} (y_{-1}^{j+1} - 2y_0^{j+1} - y_1^{j+1}) / (h_2 / R_1)^2.$$

Поскольку  $y_{-1}^{j+1} = y_1^{j+1}$ , получим

$$y_0^{j+1} - y_0^j = 4M^2 G_2 D_{0+1/2} (y_1^{j+1} - y_0^{j+1}).$$

Сравнивая с  $y_0^{j+1} = \alpha_1 y_1^{j+1} + \beta_1$ , находим

$$\alpha_1 = 4M^2 G_2 D_{0+1/2} / (1 + 4M^2 G_2 D_{0+1/2}), \quad \beta_1 = y_0^j / (1 + 4M^2 G_2 D_{0+1/2}).$$

Краевое условие на цилиндрической поверхности в разностном виде запишется как

$$\frac{y_M^{j+1} - y_{M-1}^{j+1}}{h_2 / R_1} = \frac{w_0 R_1}{D_0 n_0^{1/3} n_M^{2/3}} \times \frac{w(M, z) y_M^{j+1}}{D_{M-1/2} (y_M^j)^{1/3}}, r = R_1,$$

$$y_{M-1}^{j+1} = \alpha_M y_M^{j+1} + \beta_M.$$

Исключая  $y_{M-1}^{j+1}$ , находим граничное значение искомой функции

$$y_M^{j+1} = \frac{D_{M-1/2} \cdot \beta_M}{D_{M-1/2} (1 - \alpha_M) + P_2 w(M, z) / (y_M^j)^{1/3}}$$

с обозначениями

$$P_2 = w_0 h_2 / (D_0 n_0^{1/3} n_M^{2/3}), \quad D_{M-1/2} = (D_M - D_{M-1}) / 2.$$

При прогонке по локально-одномерной схеме разностные уравнения (4) и (5) преобразуем к алгебраической системе вида

$$A_{i,k} y_{(i,k)-1} - C_{i,k} y_{i,k} + B_{i,k} y_{(i,k)-1} = -F_{i,k}$$

с условиями  $A_{i,k} > 0$ ,  $B_{i,k} > 0$ ,  $C_{i,k} > A_{i,k} + B_{i,k}$  разрешимости системы данным методом. Далее, решение задачи находим по известной формуле [7]:

$$y_{i,k} = \alpha_{(i,k)+1} y_{(i,k)+1} + \beta_{(i,k)+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

(6)

$$\alpha_{(i,k)+1} = \frac{\beta_{i,k}}{C_{i,k} - A_{i,k} \alpha_{i,k}}, \quad \beta_{(i,k)+1} = \frac{F_{i,k} - A_{i,k} \beta_{i,k}}{C_{i,k} - A_{i,k} \alpha_{i,k}}.$$

Значения начальных прогоночных коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  определяются на внутренних граничных условиях катода. Затем из других граничных условий вычисляются значения сеточных функций  $y_{N,M}$  и по формуле (6) – все остальные значения  $y_{i,k}$ . Переход от времени  $t$  к  $t+1$  реализуется через последовательное чередование прогонок по координатам  $z$ ,  $r$ . В результате получается двумерное распределение концентрации активатора в объеме цилиндрического катода в зависимости от времени работы плазменного устройства.

Математическое моделирование процессов теплопереноса проводится в следующей последовательности. Сначала решается тепловая задача в предположении постоянства эмиссионных характеристик катода. Затем, используя поле температур в системе «катод – обойма», решается уравнение диффузии по составленному выше алгоритму.

### Заключение

Поставлена и решена в двумерном приближении задача теплопереноса эмиссионно-активирующих элементов термокатодов цилиндрической геометрии. В совместной постановке решены нелинейные уравнения теплопроводности и протекания тока, диффузии и испарения легирующих компонентов. В задаче строго сформулированы граничные условия, учтены нелинейные зависимости коэффициента диффузии и скорости испарения активатора от температуры. Численный алгоритм позволяет рассчитать поля температур  $T_{1,2}(r, z)$  и концентрации  $n(r, z, t)$ , исследовать динамику выхода активатора из катодов плазменных устройств в широком диапазоне изменения их рабочих параметров.

### **Литература**

1. Генерация низкотемпературной плазмы и плазменные технологии: проблемы и перспективы / Г.Ю. Даутов и др. Новосибирск: Наука, 2004. 464 с.
2. Электродуговые генераторы термической плазмы / М.Ф. Жуков и др. Новосибирск: Наука, 1999. 712 с.
3. Цыдыпов Б.Д., Баргуев С.Г. Постановка нелинейной термической задачи для сопряженных элементов // Вестник БГУ. Сер. Математика и информатика. 2010. Вып. 9. С. 189–193.
4. Цыдыпов Б.Д. Нелинейная термическая задача для системы сопряженных элементов. Метод решения // Вестник БГУ. Сер. Математика и информатика. 2011. Вып. 9. С. 280 – 284.
5. Динамика паров металла в пристеночных слоях плазмы / М.Ф. Жуков и др. // Доклады АН СССР. 1981. Т.260. №6. С. 1354 – 1356.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

*Цыдыпов Балдандоржо Дашиевич*, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Института физического материаловедения СО РАН, 670047, г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6. Тел.: (3012) 432282, e-mail: lmf@ipms.bscnet.ru

*Tsydyпов Baldandorzho Dashievich*, doctor of technical sciences, leading researcher, Institute of Physical Materials Science SB RAS, 670047, Ulan-Ude, Sakhyanova Str., 6. E-mail: lmf@ipms.bscnet.ru

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ,  
ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ЖУРНАЛ  
«ВЕСТНИК БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА»

Отбор и редактирование публикуемых статей производятся редакционной коллегией из ведущих ученых и приглашенных специалистов.

В журнал следует направлять статьи, отличающиеся высокой степенью научной новизны и значимостью.

Автор статьи должен заключить лицензионный договор о предоставлении неисключительных прав на использование созданного им произведения (статьи) ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет». Образец лицензионного договора представлен на сайте БГУ.

Общие требования	Тексты представляются в электронном и печатном виде. doc-файл со статьей должен быть отправлен электронным письмом. Название статьи и аннотация даются на русском и английском языках. После аннотации следует дать ключевые слова на русском и английском языках.
Электронная копия	Статья представляется на русском языке в doc-файле, набранная в текстовом редакторе Microsoft Word. Текстовый редактор Microsoft Word (версии XP, 2003). В имени файла указывается фамилия первого автора.
Параметры страницы	Формат А5. Поля: левое – 1,5 см, верхнее, нижнее, правое – 1 см.
Форматирование основного текста	С нумерацией страниц внизу по центру. Абзацный отступ – 0,5 см. Интервал – одинарный.
Гарнитура шрифта	Times New Roman. Размер кегля – 11 пт.
Объем статьи (ориентировочно)	Кратких сообщений – 4-8 с., статей на соискание ученой степени кандидата наук – 8-15 с., на соискание ученой степени доктора наук – 15-30 с.
Сведения об авторах	Указываются фамилия, имя, отчество (полностью), ученая степень, звание, должность и место работы, адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail (на русском и английском языках)

В начале статьи ставится подробный индекс УДК согласно действующим в настоящее время классификаторам. Далее следуют инициалы и фамилии авторов (полужирный курсив, выравнивание по правому краю), название статьи (полужирным шрифтом, по центру), аннотация, ключевые слова и перевод перечисленных частей текста на английский язык. В конце документа после списка литературы приводятся сведения об авторах и их перевод на английский язык (фамилия, имя, отчество полностью, ученая степень, ученое звание, должность, место работы (указываются официальные названия организаций), контактный адрес с почтовым индексом, телефоны/факсы, e-mail). Ссылки на гранты приводятся в сноске на первой странице.

Статья должна быть структурирована и содержать введение, ряд разделов с возможными подразделами, заключение, список литературы.

Набор формул осуществляется в редакторе формул Microsoft Equation 3/4 или MathType 5/6. Не допускается: набор формул как текста (включая таблицу символов, надстрочные и подстрочные индексы), а также с применением автофигур; вставка формул как рисунков; сжатие формулы как рисунка. Не допускается набор формул с применением появившегося в Word 2007 нестандартного редактора формул, функционирующего только с форматом docx. Все формулы, на которые в тексте даются ссылки, выносятся в отдельную строку с нумерацией в круглых скобках в тексте по правому краю страницы (строка выравнивается по правому краю). Основной размер шрифта в формулах 11 пт.

- Список литературы – все работы необходимо пронумеровать, в тексте ссылки на литературу оформлять в квадратных скобках.
- Материалы, не соответствующие предъявленным требованиям, к рассмотрению не принимаются.
- Решение о публикации статьи принимается редакцией «Вестника БГУ». Корректуре авторам не высылается, присланные материалы не возвращаются. Гонорар авторам не выплачивается.
- Допустима публикация статей на английском языке, сведения об авторах, название и аннотацию которых необходимо перевести на русский язык.
- Желательно использование только вертикальных таблиц и рисунков. Все объекты должны быть черно-белыми без оттенков. Рисунки и графики должны иметь четкое изображение и быть выдержаны в черно-белой гамме, лучше применять штриховку.

Стоимость опубликования одной статьи составляет за одну страницу формата А5 для сотрудников БГУ – 150 р., для остальных – 300 р.

Оплата за публикацию статьи, авторами которой являются только аспиранты, не взимается. Должна прилагаться справка учреждения, подтверждающая, что авторы являются аспирантами этого учреждения.

Адрес: 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, Издательство БГУ.  
Тел. (301-2)-21-95-57. Факс (301-2)-21-05-88

В Е С Т Н И К  
БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

1 / 2013

**Математика, информатика**

Редактор Р.В. Хабдаева  
Компьютерная верстка Д.О. Трунина

Подписано в печать 25.06.13. Формат 70 x 100 1/16.  
Усл. печ. л. 7,64. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 1000. Заказ 517.  
Цена договорная.

Издательство Бурятского госуниверситета  
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
E-mail: [riobsu@gmail.com](mailto:riobsu@gmail.com)

Отпечатано в типографии  
Издательства Бурятского госуниверситета  
670000, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, 3а