

Учредитель  
ФГБОУ ВПО «Бурятский государственный университет»

# ВЕСТНИК

БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

## 2/2014



## Математика, информатика

Журнал издается  
с 2012 года

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-48732 от 28 февраля  
2012 г. Федеральная служба по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций  
(Роскомнадзор)

Ответственные за выпуск  
**Д. О. Трунин, И.-Х. Д. Хишектуева**

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**А. С. Булдаев**, д-р физ.-мат. наук, проф.  
(гл. редактор, Улан-Удэ)  
**С. Н. Васильев**, акад. РАН, проф. (Москва)  
**В. И. Гурман**, д-р техн. наук, проф. (Москва)  
**Ж. Г. Дамбаев**, д-р техн. наук, проф. (Улан-Удэ)  
**А. В. Данеев**, д-р техн. наук, проф. (Иркутск)  
**А. И. Кожанов**, д-р физ.-мат. наук, проф.  
(Новосибирск)  
**А. В. Лакеев**, д-р физ.-мат. наук (Иркутск)

**А. Д. Мижидон**, д-р техн. наук, проф. (Улан-Удэ)  
**Ни Минь Кань**, д-р наук, проф. (КНР, Шанхай)  
**Б. Очирбат**, д-р наук, проф. (Монголия,  
Улан-Батор)  
**В. А. Срочко**, д-р физ.-мат. наук, проф. (Иркутск)  
**Д. Ш. Ширапов**, д-р физ.-мат. наук, проф.  
(Улан-Удэ)  
**Р. Энхбат**, д-р наук, проф. (Монголия,  
Улан-Батор)

✉ АДРЕС РЕДАКЦИИ  
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
☎ 21-77-33 [vestnik\\_bsu\\_math@rambler.ru](mailto:vestnik_bsu_math@rambler.ru)

✉ АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ  
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
☎ 21-95-57, [riobsu@gmail.com](mailto:riobsu@gmail.com)

## Содержание

### 1. Математическое моделирование

<i>Анахин В. Д.</i> Моделирование колебаний нелинейной динамической системы .....	4
<i>Дамбаев Ж. Г., Ремизов А. И., Чистяков Ю. А.</i> Математическая модель движения газообразных продуктов взрыва в скважине и приложение для промышленной безопасности .....	10
<i>Итигилов Г. Б., Ширанов Д. Ш., Олзоева С. И.</i> Математическая модель распространения электромагнитных волн в ограниченных гиротропных областях при продольном намагничивании .....	16
<i>Итигилов Г. Б., Ширанов Д. Ш., Олзоева С. И.</i> Численные решения дисперсионных уравнений электромагнитных волн в ограниченных продольно-намагниченных гиротропных эллиптических областях.....	21
<i>Ломухин Ю. Л.</i> Математическая модель многомодового отражения и преломления волн.....	28
<i>Мантатов В. В.</i> Критерий стеклования расплава металлических стекол в модели делокализации атома.....	35
<i>Олзоева А. Г., Олзоева С. И.</i> Автоматизация параллельного вычислительного процесса при имитационном моделировании.....	43

### 2. Управляемые системы и методы оптимизации

<i>Булдаев А. С.</i> Методы параметрической оптимизации динамических систем с ограничениями типа равенства на основе задач о неподвижной точке.....	47
<i>Бурлаков И. Д.</i> Численные эксперименты по анализу эффективности проекционного метода нелокального улучшения.....	59

### 3. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

<i>Шишкин Г. А.</i> Краевая задача одного вида интегродифференциальных уравнений Вольтерра нейтрального типа.....	67
---	----

## Contents

### 1. Mathematical modeling

<i>Anakhin V. D.</i> Modeling oscillations of nonlinear dynamic system ...	4
<i>Dambaev Zh. G., Remizov A. I., Chistyakov Yu. A.</i> Mathematical model of motion of gaseous products of explosion in a boring well and application for industrial safety.....	10
<i>Itigilov G. B., Shirapov D. Sh., Olzoeva S. I.</i> Mathematical model of propagation of electromagnetic waves in limited gyrotropic areas at longitudinal magnetization.....	16
<i>Itigilov G. B., Shirapov D. Sh., Olzoeva S. I.</i> Numerical solutions of dispersing equations of electromagnetic waves in the limited longitudinally magnetized gyrotropic elliptic areas.....	21
<i>Lomukhin Yu. L.</i> A mathematical model of multimode reflection and refraction of waves.....	28
<i>Mantatov V. V.</i> Criterion of glass transition at melt metallic classes in a model of atom delocalization.....	35
<i>Olzoeva A. G., Olzoeva S. I.</i> Automation of parallel computing process at simulation modeling.....	43

### 2. Controlled systems and methods of optimization

<i>Buldaev A. S.</i> Methods of parametric optimization of dynamic systems with equality type constraints on the basis of fixed point problems.....	47
<i>Burlakov I. D.</i> Numerical experiments in effectiveness analysis of projection method for nonlocal improvement .....	59

### 3. Functional analysis and differential equations

<i>Shishkin G. A.</i> Boundary value problem of one kind for Volterra integral and differential equations of neutral type.....	67
--	----

# 1. Математическое моделирование

УДК 66.621.928.13

© *В. Д. Анахин*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Разработана математическая модель инновационного процесса, имеющего перспективу использования в ряде отраслей промышленного производства в целях создания и совершенствования новых аппаратов и технологий. Основное условие возникновения нового эффекта – асимметрия колебаний нелинейной динамической системы.

**Ключевые слова:** асимметрия колебаний, эффекты в системах с трением, математический анализ динамики процессов, мониторинг параметров.

© *V. D. Anakhin*

## MODELING OSCILLATIONS OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM

A mathematical model of innovative process has been developed, it has the prospect for use in a set of branches of industrial production for creation and improvement of new machine and technologies. The main condition of the new effect concludes in the asymmetry of oscillation of the nonlinear dynamic system.

**Keywords:** asymmetry of oscillation, effects in the systems with friction; mathematical analysis of the dynamics of processes, monitoring of parameters.

Completely new equipment design of VS distinguished from a vibrating screen in that it is complete with an un perforated deck (separating surface) specified with respect to the ground surface (horizon). Many variations of parallel-deck VS are now available: some have flat decks, some use concave decks. Most of the decks are placed on two tilt angles to allow the components of the mix to disengage as they pass through the deck section. Parallel decks added to VS can greatly improve separation quality and increase capacity. The parameter factor of the solids present in the mix is also essential with the screen less method motivated by the acceleration of vibration. The design of equipment for this particular case is less developed aspects of vibration technology. Selection of the separation technique or techniques to be used for a particular system can be also broken down into the task to use the translational vibration motion in the direction of the Y axis of the deck of VS (longitudinal vibration). The technical feasibility and engineering perspectives

of a given method must be attractive. Some comments on the selection are included to provide some perspective for discussion in works. Mixtures of dry solids can be separated by the specific thickness differences of the components. The proper introduction to feed to a VS is one of the keys to its performance. The batching and removal of solids require a good control. For some critical designs, the performance cannot be predicted theoretically and such systems require experimental work to determine concentration of feed, sizing (spacing for equipment), material of construction, operating conditions and costs, quality required, etc. For consistence performance dynamic models are useful in evaluating optimal performance.

The design shown below which is common for the process depended on the differences of the solids present in a multicomponent mixture. A schematic diagram of a typical motion is shown in Fig. 1. The gap may be calculated by the expressions:

$$\begin{aligned}\delta_{y,\max} &= \delta + (A_1 + A_2) \sin \beta \\ \delta_{y,\min} &= \delta - (A_1 + A_2) \sin \beta\end{aligned}$$

where  $\delta_{y,\max}$  is the maximum linear shift in the direction of Y- axis;

$\delta_{y,\min}$  is the minimum linear shift in the direction of Y- axis;

$\delta$  is a gap between the bar (part 1) and the deck (part 2) as shown in

Fig. 1.;

$A_1$  is a shift amplitude of the deck;

$A_2$  is a shift amplitude of the bar, and

$\beta$  is the angle of vibration

The schematic representation of the displacement amplitudes of the mechanical parts of VS used in the design and operation of separation process arising from differences in particles illustrates possibility of passage of thin particles through opening  $\delta$  between the bar and deck plane. The device has been tried experimentally but are not in use commercially. This horizontal device can be used to estimate the performance of VS of various sizes and it can be used to predict the effect of specific difference of solids, and allows prediction of capacities at various flows of the mixtures as a function of dynamic parameters. This information will be adequate to determine the final design of a VS, provided the solids of the mix are readily characterized and the solids concentration in the feed is steady. For applications where the solids widely in thickness, a test program should be undertaken. The VS of this type is applicable where separated solids are expected to be very dry. In horizontal VS mathematical modeling is useful in evaluating their performance.

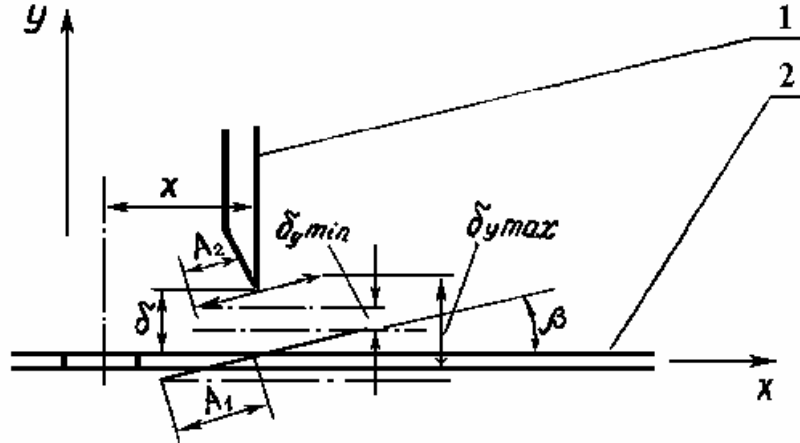


Figure 1. Diagram depicting shift of mechanical parts of the machine used to illustrate the principle of process by particle parameters.

Theoretical calculations are recommended for potential design of VS with the deck generally placed horizontally and acted upon by the rectangular step excitation.

The mathematical basis for process motivated by the rectangular acceleration of translational vibration motion and steps in exact solution of transcendental equations of particle movement are presented below. Motion of single degree-of-freedom system of the VS deck acted upon by the rectangular step excitation (the rectangular acceleration pulse of magnitude  $w$  and duration  $t$ ) is discussed. The corresponding velocities of time histories are also for various conditions. The magnitude of the velocity  $u$  change defines the intensity of the process. The longitudinal displacement of the deck during the vibration is characterized by three steps (for purposes of illustration in the following examples the primary time history is that of acceleration, time-histories of velocities may be derived there from by integration). If the velocity  $u$  is zero at time  $t=0$ , then the velocity time-history is a line of constant slope, the corresponding acceleration time-history is the acceleration step of constant value as was shown]. The first step is defined as a forward motion which has value  $u$  of zero and a value of  $w$  slightly greater than zero ( $w_1 > 0, u_{1H} = 0$ ); the second step describes forth and back motion for the conditions ( $w_2 < 0, u_{2H} = u_{1H} > 0, u_{2K} < 0$ ); that is the acceleration step has a value less than zero significantly; the third step is defined as backwards motion which has a value of acceleration somewhat greater than zero ( $w_3 > 0, u_{3H} = u_{2K} < 0, u_{3K} = 0$ ), where  $w_i$  is the acceleration step,  $u_{iH}$ ,  $u_{iK}$  are initial and finite deck velocity steps.

The motivated particle movement is defined mathematically as a function of

$w_1, w_2, w_3, u_{1K}, u_{2K}$ . If the accelerations are  $w_1 = w_3$ ,  $w_1 < -w_2$ , with the simplest representation of the Coulomb friction force and the effect of air resistance ( $F_c = 3\pi\mu Dv$ ) the mathematical expressions describing the motion of a particle of mass  $m$  are

$$m \frac{dv}{dt} = \chi \cdot f \cdot g - \frac{3\pi\mu Dv}{m},$$

or

$$\frac{dv}{dt} = \chi \cdot f \cdot g - \frac{3\pi\mu Dv}{m},$$

where  $f$  is the coefficient of friction,  $D$  is the particle diameter,  $\mu$  is the air viscosity,  $g$  is the acceleration of gravity. The algebraic sign of the friction term changes when the velocity changes sign ( $-I \leq \chi \leq +I$ ). For forward sliding when  $v < u$  it must have a positive sign  $\chi = +I$ ; for backwards sliding:  $v > u$ ,  $\chi = -I$ ; at rest  $v = u$  it is  $\chi \neq \pm I$ .

By performing transformation of the latter equation the following differential equation of the particle motion is obtained

$$\frac{dv}{dt} = \chi \cdot f \cdot g - nv;$$

where  $n = 3\pi\mu D/m$ .

Rewriting,

$$dv = \chi \cdot f \cdot g \cdot dt - nv \cdot dt$$

The solution for the latter equation is of the form

$$v = \chi \frac{fg}{n} + \left( \chi \frac{fg}{n} - v_{iH} \right) \exp[-n(t - t_H)];$$

$$l = \chi \frac{fg}{n} (t - t_H) - \frac{1}{n} \left( \chi \frac{fg}{n} - v_{iH} \right) \{1 - \exp[-n(t - t_H)]\};$$

where the required values of particle displacement  $l$  and its velocity  $v$  are found.

Consider the following operating conditions:

1.  $w_1 < -w_2 \ll fg$  is a stationary rate.

2.  $w_1 < fg < -w_2$ . A brief review of the complete solution evaluated from a knowledge of these starting conditions is given as follows: the particle size is a somewhat factor with the moving and separation motivated by the rectangular vibration. They occur at values of velocities not greatly different from each other; hence, attention is devoted to the next case.

3.  $fg < w_1 < w_2$ . For the forward sliding mode ( $v < u$ ) the highest possible value of the velocity is described by the following equation:

$$v_{1K} = \frac{fg}{n} - \left( \frac{fg}{n} - v_{2K} \right) \exp[-n(T - T')]$$

and the expression for the response particle displacement is

$$l_1 = \frac{fg}{n}(T - T_1) - \frac{1}{n} \left( \frac{fg}{n} - v_{2K} \right) \{1 - \exp[-n(T - T')]\}.$$

For the backwards sliding mode ( $v > u$ ) the terminal velocity and displacement function are defined by

$$v_{2K} = -\frac{fg}{n} + \left( \frac{fg}{n} - v_{1K} \right) \exp(-nT'); \\ l_2 = -\frac{fg}{n}T' + \frac{1}{n} \left( \frac{fg}{n} - v_{1K} \right) [1 - \exp(-nT')],$$

where  $T' = t_2 - t_1$ .

The foregoing equations are alike, mathematically, and a solution may be applied to any of the others by making simple substitutions. Therefore, the equations may be expressed in the general form:

$$\frac{\left(T' - \frac{T}{2}\right)[1 - \exp(-nT)]}{\frac{fg}{n}} = \frac{1 + (\exp(-nT) - 2 \exp[-n(T - T')])}{|w_2|} - \\ - \frac{1 + \exp(-nT) - 2 \exp(-nT')}{w_1}; \\ v_{1K} = \frac{fg}{n[1 - \exp(-nT)]} \cdot \{1 + \exp(-nT) - 2 \exp[-n(T - T')]\} = w_1\tau - |w_2| \cdot (t_1 - \tau); \\ v_{2K} = \frac{fg}{n[1 - \exp(-nT)]} \cdot [-1 - \exp(-nT) + 2 \exp(-nT')] = w_1(T_2 - t_2); \\ l = l_1 + l_2 = \frac{fg}{n}(T - 2T') \\ v_y = \frac{l}{T}.$$

If the air resistance is negligible ( $n = 0$ ), the equations reduces to the form

$$v_{1K} = fg\tau; \\ v_{2K} = fg \left[ \tau - \frac{T}{2} \right]; \\ v_y = fg \left[ \tau - \frac{T}{4} \right].$$

Within each case there are variations and differences of effects. For the third case 3, separation depends essentially on the size differences of the particles



present in the mix. The maximum value of the velocities will hold in this case:  $w_1 \geq fg$ .  $w_1 \geq fg$  ( $n \rightarrow 0$ )  $w_2$ . The particle velocity forward the deck plane directly related to the friction coefficient which is a function of the particle shape and size. Rectangular pulse excitation: the excitation function given by  $\tau$  and  $T$  includes the natural period of the responding system and a significant period of the excitation. The excitation may be defined in terms of various physical quantities, and the response factor may depict various characteristics of the response. The purpose is to compare vibration motions, to design equipment and to obtain useful information. Care must be taken to assure that the same VS and its performance can be predicted theoretically but such VS require experimental work. The mechanical design, however, may be used commercially by the application of vibration considered to be sinusoidal or simple harmonic in form. Alternate form of the excitation may be applied after making simple substitutions of vibration exciters.

### CONCLUSIONS

1. In the design and operation of processes depended essentially on the parameter differences of the solids present in the mix a problem is approached logically by first preparing an initial design. A subsequent analysis point to desirable modifications.

2. An initial prototype equipment has been designed and is then constructed in which actual operating conditions preferably are determined and considered from practical point of view.

3. From the analytical point of view and to provide some perspective for later improvement of existing processes the single degree-of-freedom system of the horizontal VS model acted upon by rectangular step excitation is considered with mathematical method of analysis to obtain useful information. The technical feasibility of a given separation method might be essentially attractive.

4. The optimum design must arise from careful consideration of all feasible alternatives and represents the further inventive aspect of process design.

*Владимир Дмитриевич Анахин*, доктор технических наук, профессор,  
e-mail: anakhin@mail.ru

*Vladimir Dmitrievich Anakhin*, Doctor of Technical Sciences, Professor.

УДК 622.235.22

© *Ж. Г. Дамбаев, А. И. Ремизов, Ю. А. Чистяков*

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ГАЗООБРАЗНЫХ ПРОДУКТОВ ВЗРЫВА В СКВАЖИНЕ И ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ**

Статья посвящена расчету движения продуктов взрыва для обоснования безопасности ведения массовых взрывных работ при добыче строительных материалов из природного камня. Рассматриваются математическая модель истечения продуктов взрыва в скважине и ее сопровождение модельными экспериментами с целью проверки теоретических расчетов. При этом необходимо учесть взаимодействие волн напряжений между смежными удлиненными зарядами и детерминированно определить время процесса трещинообразования. Тем самым обосновывается безопасность взрывных работ для разрушения горных пород.

**Ключевые слова:** взрыв, ударная волна, кинетика взрывчатого превращения, газообразные продукты взрыва, взрывное действие на горную породу, магистральная трещина.

© *Zh. G. Dambaev, A. I. Remizov, Yu. A. Chistyakov*

### **MATHEMATICAL MODEL OF MOTION OF GASEOUS PRODUCTS OF EXPLOSION IN A BORING WELL AND APPLICATION FOR INDUSTRIAL SAFETY**

The article is devoted to the calculation of explosion products movement for substantiating safety of the mass blasting in mining construction materials from natural stone. A mathematical model of explosion products expiration in the boring well and its maintenance by model experiments to verify theoretical calculations are considered. Thus it is necessary to take into account the interaction of waves of pressure between the adjacent extended charges and determine the time of crack formation. Thereby the blasting safety for destruction of rocks is provided.

**Keywords:** explosion, shock wave, kinetics of explosive transformation, gaseous products of explosion, blasting effect on a rock, main crack.

При взрыве удлиненного цилиндрического заряда в скважине происходят быстропротекающие сложные газодинамические процессы, которые зависят от типа заряда, способов инициирования, кинетики взрывчатого превращения, и дальнейшее истечение газообразных продуктов взрыва в атмосферу, которые трансформируется в ударную воздушную волну. При этом необходимо рассмотреть две механические задачи: 1) о движении газообразных продуктов взрыва в зарядной полости, 2) о дви-

жении массива горной породы под воздействием взрыва. Под движением подразумеваются массовые движения среды. Для обоснования требуется сопоставить скорости движения различных сред: газообразных продуктов взрыва и массового движения частиц горной породы. Необходимо рассмотреть совместное движение двух сред (продуктов взрыва и массовое движение горной породы), которое определяет процесс развития магистральной трещины между смежными зарядами.

Разделение процесса на фазы является условным и производится в соответствии с наличием граничных условий в механическом процессе взрыва удлиненного заряда.

Описана теория газодинамических процессов в скважине, в основе которой лежит допущение о процессе, вызванном распространением детонационной волны по длине заряда, как об одномерном нестационарном движении газов. Правомерность такой постановки базируется на оценках, непосредственно вытекающих из исходных условий: диаметр полости много меньше ее длины; сжимаемость породы много больше сжимаемости продуктов взрыва; скорости газодинамических возмущений в них много больше скорости звука в воздухе. Известно, что скальные горные породы имеют большую акустическую жесткость и незначительное расширение камуфлетной полости. В этом случае выравнивание распределений газодинамических параметров по сечению скважины происходит за время, сопоставимое со временем взрывчатого перемещения заряда по всей длине. Как следствие, при рассмотрении процесса «в целом», т. е. в масштабе длины зарядной полости, временем выравнивания давления по сечению можно пренебречь и считать это выравнивание мгновенным.

Основные функции состояния и движения газообразных продуктов зависят от пространственной (осевой) координаты  $Z$  и времени  $t$ . Газ считается идеальным. Состояние газа по длине шпура описывается системой уравнений газовой динамики, базирующихся на учете основных законов механики – сохранения массы, импульса, энергии, в форме, соответствующей одномерной модели нестационарного течения. Полагаем, что газы вступают в работу по генерированию квазистатического поля напряжений в процессе расширения взрывной камеры до конечных размеров. Нестационарное истечение обусловлено распадом начального разрыва (1-го рода) между этими параметрами газообразных веществ и параметрами невозмущенным воздухом.

Образующееся при этом течение газов является автотельным, то есть развивается подобно самому себе единообразно во времени, движение продуктов взрыва сопровождается возникновением ударной волны, формирующимся в процессе движения газов по длине зарядной камеры. Значения параметров массовой скорости, давления и плотности на фронте ударной волны определяются по формулам:

$$U_1 = \frac{2}{\kappa + 1} \cdot U_s \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right),$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot \left( M^2 - \frac{\kappa - 1}{2 \cdot \kappa} \right),$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\kappa + 1) \cdot M^2}{2 + (\kappa - 1)},$$

где  $U_s$  – скорость ударной волны, распространяющейся по невозмущенному газу;  $P_0$ ,  $\rho_0$  – соответственно давление и плотность невозмущенного газа;  $\kappa$  – показатель адиабаты для газа;  $M = \frac{U_s}{a_0}$  – число Маха,  $a_0$  – скорость звука в воздухе.

Соотношение, определяющее число Маха для ударной волны, возникшей при распаде разрыва  $\frac{P_m}{P_0}$ , записывается в виде:

$$\frac{P_m}{P_0} = \left( \frac{2 \cdot \kappa_0}{\kappa_0 + 1} \cdot M^2 - \frac{\kappa_0 - 1}{\kappa_0 + 1} \right) \left( 1 - \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_0 + 1} \cdot \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right) \cdot \frac{M \cdot a_0}{a_1} \right)^{\frac{2 \cdot \kappa_1}{\kappa_1 - 1}},$$

где  $P_m$  – давление ПВ после расширения до сечения скважины;  $a_1$  – местная скорость звука в ПВ;  $\kappa_1$  – показатель адиабаты ПВ [1].

Возникшее течение по длине зарядной камеры содержит ударную волну, контактную поверхность и волну разрежения. В дальнейшем, с истечением продуктов взрыва из устья шпура, процесс меняется, поэтому область применимости данного решения ограничивается для расчетов параметров ударной воздушной волны.

Рассмотрим на практическом примере добычи блочного камня при глубине шпура 3 м и длине заряда, равной 2/3 глубины, линейной скорости детонирующего шнура  $6,5 \cdot 10^3$  м/с и скорости движения газообразных продуктов в шпуре  $0,7 \cdot 10^3$  м/с. При этом интервал установившегося времени составляет  $2000 \cdot 10^{-6}$  с в средней части колонки удлиненного заряда.

Необходимо сопоставить полученные значения давления с оценками длительности воздействия взрыва в средней части колонки заряда при расстоянии между шпурами 0,5 м. Этот участок волна напряжений покрывает примерно за  $50 \cdot 10^{-6}$  с, то есть за время 35–40 раз меньше, чем время установившегося давления в рассматриваемом сечении шпура. В этом случае можно считать, что в области массива между зарядными полостями устанавливается квазистатическое поле напряжений. Также

известно, что скорость распространения трещин в горных породах составляет  $(0,2 \div 0,4) c_p$  скорости продольной волны. Следовательно, для данного случая в скальных породах процесс трещинообразования между смежными зарядными полостями осуществляется за  $125 \cdot 10^{-6}$  с, то есть процесс трещинообразования горной породы происходит за время существенно больше, чем время действия волны напряжений и значительно меньше, чем время действия установившегося квазистатического давления продуктов взрыва [2].

На рис. 1 показана эпюра распределения давления ПВ по длине шпура в различные моменты времени. Таким образом, проведена численная оценка эффекта квазистатического давления, и на основе выполненных расчетов можно утверждать, что процесс направленного разрушения происходит за счет квазистатического действия продуктов взрыва.

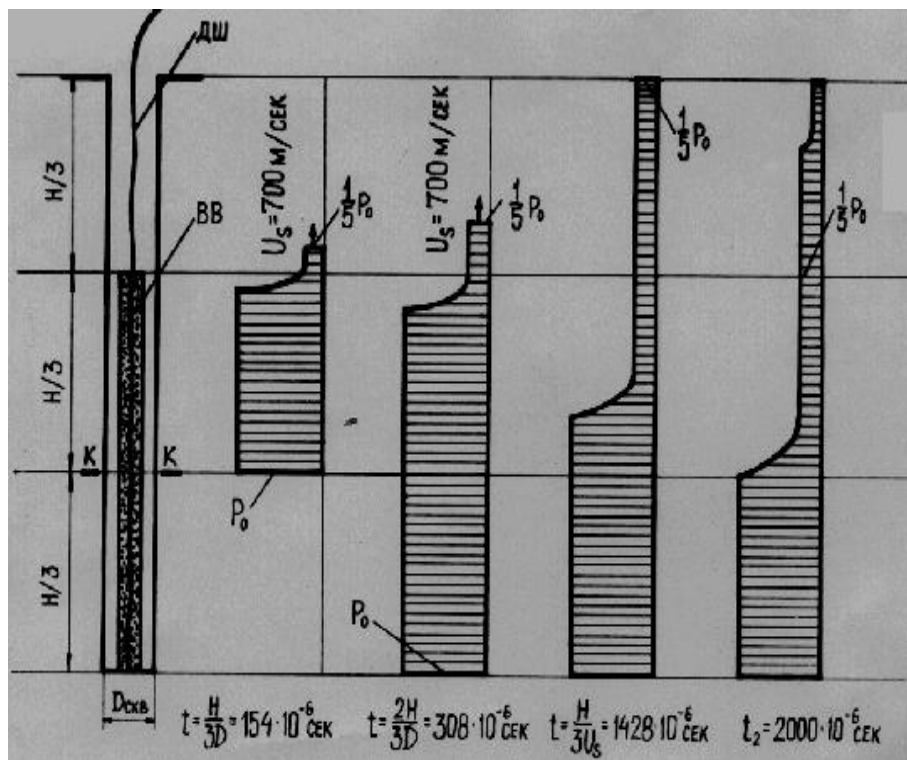


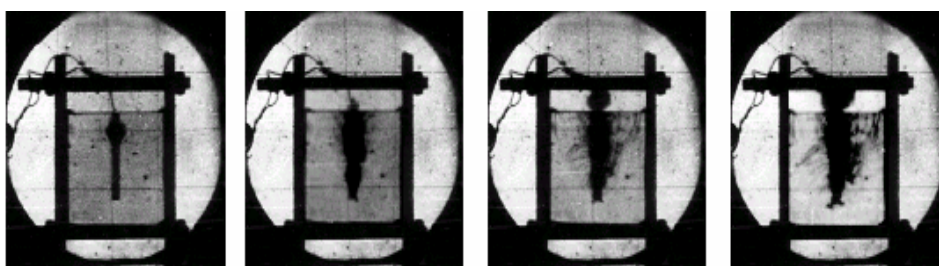
Рис. 1. Распределение давления ПВ в шпуре

Для обоснования численных расчетов и получения более достоверной картины были проведены модельные эксперименты на оптически прозрачных моделях методом скоростной фотосъемки. Кинограмма процесса истечения газов и распространения волн напряжений, а также развитие процесса трещинообразования представлены на рис. 2 (а, б, в, г) с интер-

валом 18 мкс. По результатам интерференционной картины видны процесс развития магистральной трещины в плоскости раскола и оставшиеся газообразные продукты взрыва в шпуре.

Модели представляли собой кубики размером  $100 \times 100 \times 100$ , в центре которых имелись цилиндрические полости диаметром 7 мм и глубиной 75 мм, в которых коаксиально размещался заряд диаметром 2 мм, высотой 50 мм и массой ТЭНа 1,4 г.

При взаимодействии волн напряжений происходит развитие магистральной трещины между удлинненными цилиндрическими полостями, что приводит к увеличению скорости роста магистральной трещины, величина которой составляет  $(0,3-0,4) c_p$ , где  $c_p$  – скорость продольной волны в оптическом стекле. При дальнейшем движении этой плоскости происходит слияние в единую плоскость трещинообразования. На основании наглядной картины распространения волн напряжений в процессе трещинообразования можно представить разрушение твердой среды следующим образом: в окрестности зарядной полости образуются растягивающие напряжения, которые превышают предел прочности на растяжение и тем самым происходит старт радиальных трещин по линии расположения зарядов. При этом процесс можно рассматривать как квазистатический, в котором расположение напряжений определяет развитие трещины.



а                                      б                                      в                                      г

Рис. 2. Кинограмма взрыва удлиненного цилиндрического заряда

Ступенчатая поверхность раскола носит скачкообразный характер, развитие трещины происходит за счет промежуточных релаксационных процессов напряжений. Пульсация обусловлена тем, что величина интенсивности напряжений в вершине трещины, необходимая для дальнейшего роста, определяется временем подпитки нужного уровня интенсивности напряжений.

Для моделирования процесса взаимодействия волн напряжений от смежных зарядов к двум боковым граням модели прикладывались гладкие жесткие пластины. Из кинограммы видно (рис. 2), что скорость детонации заряда составляла 6000 м/с, а скорость истечения газов составляет 700–1000 м/с. Волны напряжений в модели распространялись со скоро-

стью продольной волны данной среды. В результате интерференции волн напряжений от жестких границ (осей симметрии) образовывались направленные радиальные трещины, которые детерминировали раскол модели на две равные части. При этом средняя скорость развития магистральной трещины составляла около 2000 м/с, и процесс разрушения образца происходил за  $25 \cdot 10^{-6}$  с. Следовательно, можно утверждать, что определяющую роль в развитии магистральной трещины играет взаимодействие волн напряжений, хотя при этом в полости зарядной камеры еще продолжают сохраняться газообразные продукты взрыва, что свидетельствует о квазистатическом процессе разрушения горной породы.

### Литература

1. Жигалко Е. Ф. Динамика ударных волн. – Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1987. – 287 с.
2. Дамбаев Ж. Г., Ковалевский В. Н. Математическая модель движения продуктов взрыва в шпуре для обеспечения процесса направленного разрушения горных пород // Вестник Бурятского государственного университета. – 2011. – Вып. 9. – С. 249–252.

*Дамбаев Жаргал Гомбоевич*, доктор технических наук, профессор Бурятского государственного университета, e-mail: [g.dambaev@rambler.ru](mailto:g.dambaev@rambler.ru), тел. 8–902–161–4222.

*Ремизов Алексей Игоревич*, эксперт, ООО «Спектр НК», e-mail: [snk27@yandex.ru](mailto:snk27@yandex.ru), тел. 8–914–899–1345.

*Чистяков Юрий Андреевич*, эксперт, ООО «Спектр НК», e-mail: [snk27@yandex.ru](mailto:snk27@yandex.ru), тел. 8–902–514–4328.

*Dambaev Zhargal Gomboevich*, Doctor of Technical Sciences, Buryat State University, Professor.

*Remizov Alexey Igorevich*, LLC "Spectrum NDT" expert.

*Chistyakov Yuri Andreevich*, LLC "Spectrum NDT" expert.

УДК 537.876.4

© *Г. Б. Итигилов, Д. Ш. Ширапов, С. И. Олзоева*

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННЫХ ГИРОТРОПНЫХ ОБЛАСТЯХ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ НАМАГНИЧИВАНИИ**

Разработана математическая модель, позволяющая моделировать общие закономерности распространения электромагнитных волн в ограниченных продольно-намагниченных гиротропных областях с разными ортогональными формами поперечного сечения.

**Ключевые слова:** электромагнитная волна, ограниченная область, уравнения Максвелла, уравнения Гельмгольца, продольное намагничивание.

© *G. B. Itigilov, D. Sh. Shirapov, S. I. Olzoeva*

## **MATHEMATICAL MODEL OF PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN LIMITED GYROTROPIC AREAS AT LONGITUDINAL MAGNETIZATION**

A mathematical model allowing model the general regularities of propagation of electromagnetic waves in the limited longitudinally magnetized gyrotropic areas with different orthogonal forms of a transverse section is developed.

**Keywords:** electromagnetic wave, limited area, Maxwell's equations, Helmholtz's equations, longitudinal magnetization.

### **Введение**

Распространение электромагнитных волн (ЭМВ) как в ограниченной, так и в неограниченной продольно-намагниченной гиротропных областях приводит к эффекту Фарадея. Это свойство широко используется в практических приложениях [1,2].

В настоящее время распространение ЭМВ в продольно-намагниченных ограниченных прямоугольных и круглых областях достаточно хорошо изучены [1–3]. Но распространение ЭМВ в гиротропных эллиптических областях мало исследованы и носят фрагментарный характер [см. например, 4].

Целью настоящей работы является разработка обобщенной математической модели ЭМВ в ограниченных гиротропных областях с ортогональной формой поперечного сечения, на базе которой возможен переход к частным случаям: прямоугольным, круглым, эллиптическим.



Модель включает в себя поперечные компоненты, уравнения Гельмгольца и граничные условия.

### Поперечные компоненты

Уравнения Максвелла для гармонических процессов без наведенных токов и зарядов имеют вид [1]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{H} = j\omega \varepsilon \bar{E}; & \operatorname{rot} \bar{E} = -j\omega \bar{B}; \\ \operatorname{div} \bar{E} = 0; & \operatorname{div} \bar{B} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\bar{E}, \bar{H}$  – соответственно напряженности электрического и магнитного полей;  $\varepsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды,  $\varepsilon \bar{E} = \bar{D}$  – электрическая индукция,  $\bar{B}$  – магнитная индукция,  $j$  – мнимая единица,  $\omega$  – циклическая частота.

При распространении волны в магнитогиrotропной среде магнитная индукция  $\bar{B}$  в системе (1) примет следующий вид:

$$\bar{B} = \|\mu\| \bar{H}. \quad (2)$$

При продольном намагничивании, когда направление внешнего намагничивающего постоянного магнитного поля совпадает с направлением распространения ЭМВ (волна распространяется вдоль координаты Z), тензор магнитной проницаемости феррита, как следует из [1], имеет вид:

$$\|\mu\| = \begin{bmatrix} \mu & jk & 0 \\ -jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\mu = \mu_0 + \mu_0 \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad k = \mu_0 \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega_M = \mu_0 Y M_0, \quad Y = 1.76 * 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кГ}}$$

– гиромагнитное отношение для спина электрона,  $\omega_0 = \mu_0 Y H_0$  – частота ферромагнитного резонанса,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $M_0$  – намагниченность феррита,  $H_0$  – намагничивающее внешнее магнитное поле.

Знаки перед недиагональными компонентами в (3) могут быть противоположными, если взять  $k = -\mu_0 \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}$ .

В системе (1), разложив  $\operatorname{rot} \bar{H}$  и  $\operatorname{rot} \bar{E}$  по поперечным осям, после подстановок и преобразований в [5] были получены поперечные компоненты электромагнитного поля при продольном намагничивании:

$$\begin{cases} E_1 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-} \left\{ \nabla_1 E_Z + \frac{w\mu}{\gamma} \frac{c^2}{a^2} \nabla_2 H_Z - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_2 E_Z - \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_1 H_Z \right] \right\}, \\ E_2 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-} \left\{ \nabla_2 E_Z - \frac{w\mu}{\gamma} \frac{c^2}{a^2} \nabla_1 H_Z + \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \nabla_1 E_Z + \frac{\gamma}{w\varepsilon} \nabla_2 H_Z \right] \right\}, \\ H_1 = \frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_Z - \nabla_1 H_Z + \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_Z + \nabla_2 H_Z \right] \right\}, \\ H_2 = -\frac{j\gamma a^2}{g_+ g_-} \left\{ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_1 E_Z + \nabla_2 H_Z - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \nabla_2 E_Z - \nabla_1 H_Z \right] \right\}, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$a^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2, \quad g_{\pm}^2 = w^2 \varepsilon \mu \pm w^2 \varepsilon k - \gamma^2, \\ c^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} - \gamma^2, \quad \nabla_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad \nabla_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2},$$

$w$  – циклическая частота,  $\gamma$  – постоянная распространения,  $h_1, h_2$  – коэффициенты Ламэ,  $u_1, u_2$  – поперечные координаты.

### Уравнения Гельмгольца

Подставив выражение для поперечных компонент ЭМВ (4) в проекции  $rot \vec{H}$ ,  $rot \vec{E}$  на продольную ось и используя  $div \vec{B} = 0$ , с учетом тензора магнитной проницаемости феррита (3) получим уравнения Гельмгольца гибридных HE и EH волн соответственно [6]:

$$\begin{cases} \Delta_{11} H_Z + \Delta_{22} H_Z + \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_Z + j\gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_Z = 0, \\ \Delta_{11} E_Z + \Delta_{22} E_Z + \left( w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2 \right) E_Z - j\gamma k w \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\Delta_{11} = \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^1 \right) = \Delta_{11}, \quad \Delta_{22} = \frac{1}{h_2^2} \left( \frac{\partial}{\partial u_2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \right) = \Delta_{22},$$

$$\Gamma_{12}^1, \Gamma_{21}^2 - \text{символы Кристоффеля, } \mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}.$$

### Граничные условия

Краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнений Гельмгольца (5) имеют вид:

$$\begin{cases} E_z \in C^2(G) \cap C(\partial G); \\ E_z = 0 \text{ на границе ограниченной области } \partial G \end{cases} \quad (6)$$

и

$$\begin{cases} H_z \in C^2(G) \cap C^1(\partial G); \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ на границе ограниченной области } \partial G, \end{cases} \quad (7)$$

где  $G$  – ограниченная область,  $\partial G$  – граница ограниченной области,  $C(G)$  – непрерывные на  $G$  функции,  $C^1(G)$  – непрерывно дифференцируемые на  $G$  функции,  $C^2(G)$  – дважды непрерывно дифференцируемые на  $G$  функции,  $n$  – нормаль к границе ограниченной области  $\partial G$ .

#### Заключение

Разработанная математическая модель ЭМВ позволяет на единой методологической базе исследовать электромагнитные процессы в ограниченных гиротропных областях с разными ортогональными формами поперечного сечения. Модель позволяет получить дисперсионные уравнения, описывающие процесс распространения ЭМВ в таких областях.

#### Литература

1. Микаэлян А. Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. – Л.:Госэнергоиздат, 1963. – 664 с.
2. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. – М.: Физматлит, 1994. – 464 с.
3. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики: пер. с англ. – М.: Мир, 1965. – 676 с.
4. Гончаров А. М., Карпенко В. А. Основы теории оптических волноводов. – 2-е изд., испр. – М.:Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.
5. Итигилов Г. Б., Ширапов Д. Ш. Метод инвариантных преобразований для определения поперечных компонент электромагнитного поля в гиротропных ограниченных областях // Вестник Бурятского государственного университета. – 2012. – Вып. 9. – С.162–166.
6. Итигилов Г. Б., Ширапов Д. Ш. Волновые уравнения электромагнитных волн в ограниченных областях с ферритовым заполнением с ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании // Вестник Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления. – 2012. – № 3(38). – С. 5–10.

*Г. Б. Итигилов, Д. Ш. Ширанов, С. И. Олзоева.* Математическая модель распространения электромагнитных волн...

---

*Итигилов Гарма Борисович*, старший преподаватель кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [gablz@mail.ru](mailto:gablz@mail.ru), тел. 8(3012)215–314.

*Ширанов Дашадондок Шагдарович*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [shir@esstu.ru](mailto:shir@esstu.ru), тел. 8(3012)215–314.

*Олзоева Сэсэг Ивановна*, доктор технических наук, профессор кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [sseseg@yandex.ru](mailto:sseseg@yandex.ru), тел. 8(3012)215–314.

*Itigilov Garma Borisovich*, Senior Lecturer, department of electronic computing systems, East Siberian State University of Technologies and Management.

*Shirapov Dashadondok Shagdarovich*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the department of electronic computing systems, East Siberian State University of Technologies and Management.

*Olzoeva Sesege Ivanovna*, Doctor of Technical Sciences, Professor of the department of electronic computing systems, East Siberian State University of Technologies and Management.

УДК 537.876.4:537.622.6

© Г. Б. Итигилов, Д. Ш. Ширанов, С. И. Олзоева

**ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННЫХ  
ПРОДОЛЬНО-НАМАГНИЧЕННЫХ ГИРОТРОПНЫХ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ**

Впервые получены и численно решены дисперсионные уравнения гибридных волн в ограниченных эллиптических гиротропных продольно-намагниченных областях с бесконечно проводящими стенками.

**Ключевые слова:** электромагнитная волна, ограниченная продольно-намагниченная эллиптическая область, уравнения Максвелла, дисперсионное уравнение, продольное намагничивание.

© G. B. Itigilov, D. Sh. Shirapov, S. I. Olzoeva

**NUMERICAL SOLUTIONS OF DISPERSING EQUATIONS OF  
ELECTROMAGNETIC WAVES IN THE LIMITED  
LONGITUDINALLY MAGNETIZED GYROTROPIC ELLIPTIC  
AREAS**

For the first time the dispersing equations of hybrid waves in the limited elliptic gyrotropic longitudinally magnetized areas with infinitely conducting are obtained and numerically solved.

**Keywords:** electromagnetic wave, limited longitudinally magnetized elliptic area, Maxwell's equations, dispersing equation, longitudinal magnetization.

**Введение**

Известно, что направление поворота поляризации электромагнитной волны (ЭМВ) в продольно-намагниченной гиротропной ограниченной области не зависит от направления распространения волны и изменяется на обратное при изменении направления постоянного намагничивания. Это свойство, являющееся проявлением невязимности, используется в сверхвысокочастотных ферритовых устройствах поляризационного или фарадеевского типа [1,2].

ЭМВ, распространяющаяся в регулярной эллиптической ограниченной области, имеет меньшее затухание, чем в прямоугольной и круглой при равных периметрах поперечного сечения [3].

Кроме того, эллиптическая форма поперечного сечения позволяет сохранять положение плоскости поляризации волны по отношению к сечению в отличие от круглой, у которой плоскость поляризации волны неустойчива и зависит от распределения деформации ее сечения по длине [3].

Целью настоящей работы является вывод и численное решение дисперсионных уравнений ЭМВ в продольно-намагниченных эллиптических областях для выявления особенностей распространения волн в указанных областях.

### Вывод дисперсионных уравнений

Уравнения Максвелла для гармонических процессов без наведенных токов и зарядов имеют вид [1]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{H} = j\omega \varepsilon \bar{E}; & \operatorname{rot} \bar{E} = -j\omega \bar{B}; \\ \operatorname{div} \bar{E} = 0; & \operatorname{div} \bar{B} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\bar{E}, \bar{H}$  – соответственно напряженности электрического и магнитного полей;  $\varepsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды,  $\varepsilon \bar{E} = \bar{D}$  – электрическая индукция,  $\bar{B}$  – магнитная индукция,  $j$  – мнимая единица,  $\omega$  – циклическая частота.

При распространении волны в магнитогиrotропной среде магнитная индукция  $\bar{B}$  в системе (1) примет следующий вид:

$$\bar{B} = \|\mu\| \bar{H}. \quad (2)$$

При продольном намагничивании, когда направление внешнего намагничивающего постоянного магнитного поля совпадает с направлением распространения ЭМВ (волна распространяется вдоль координаты Z), тензор магнитной проницаемости феррита, как следует из [1], имеет вид:

$$\|\mu\| = \begin{bmatrix} \mu & jk & 0 \\ -jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\mu = \mu_0 + \mu_0 \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad k = \mu_0 \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega_M = \mu_0 Y M_0, \quad Y = 1.76 * 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кГ}}$$

– гиромагнитное отношение для спина электрона,  $\omega_0 = \mu_0 Y H_0$  – частота ферромагнитного резонанса,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $M_0$  – намагниченность феррита,  $H_0$  – намагничивающее внешнее магнитное поле.

Знаки перед недиагональными компонентами в (3) могут быть противоположными, если взять  $k = -\mu_0 \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}$ .

Для получения выражений для поперечных компонент электромагнитного поля (ЭМП) в [4] на основе уравнений Максвелла был разработан метод инвариантных преобразований (МИП). В результате применения МИП к ограниченной продольно-намагниченной эллиптической области

в работе [4] были получены выражения для поперечных ЭМП:

$$\begin{cases} E_{\xi} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{w\mu}{\gamma} \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{w\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right) \right], \\ E_{\varphi} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{w\mu}{\gamma} \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\gamma}{w\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \right], \\ H_{\xi} = \frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} + \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left( \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \right], \\ H_{\varphi} = -\frac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2} \frac{1}{ed} \left[ \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{jw^2 \varepsilon k}{a^2} \left( \frac{w\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right) \right], \end{cases} \quad (4)$$

где  $\xi, \varphi$  – поперечные координаты эллиптической системы координат,  $e$  – фокусное расстояние эллипса,  $\gamma$  – постоянная распространения,  $d = \sqrt{ch^2 \xi - \cos^2 \varphi}$ ,  $a^2 = w^2 \mu_{\perp} \varepsilon - \gamma^2 = w^2 \mu \varepsilon - \gamma^2$ ,  $g_{\pm}^2 = w^2 \varepsilon \mu \pm w^2 \varepsilon k - \gamma^2$ ,  $c^2 = w^2 \varepsilon \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} - \gamma^2$ .

Ранее в работе [5], используя МИП, были получены уравнения Гельмгольца гибридных EH и HE волн соответственно:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 (w^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \gamma^2) E_Z - je^2 d^2 \gamma w k \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} H_Z = 0, \\ \frac{\partial^2 H_Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H_Z}{\partial \varphi^2} + e^2 d^2 \left( w^2 \varepsilon \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \gamma^2 \right) H_Z + je^2 d^2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} E_Z = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}$ .

Краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнений (5) имеют вид:

$$\begin{cases} E_Z \in C^2(G) \cap C(\partial G); \\ E_Z = 0 \text{ на границе ограниченной области } G(\partial G) \end{cases} \quad (6)$$

и

$$\begin{cases} H_Z \in C^2(G) \cap C^1(\partial G); \\ \frac{\partial H_Z}{\partial n} = 0 \text{ на границе ограниченной области } G(\partial G), \end{cases} \quad (7)$$

где  $G$  – ограниченная область,  $\partial G$  – граница ограниченной области,  $C(G)$  – непрерывные на  $G$  функции,  $C^1(G)$  – непрерывно дифференцируемые на  $G$  функции,  $C^2(G)$  – дважды непрерывно дифференцируемые на  $G$  функции,  $n$  – нормаль к границе ограниченной области  $\partial G$ .

Для решения уравнений Гельмгольца (5) с условиями (6) и (7) применим метод, предложенный в [6]. Затем, подставив полученные решения в (4) и применив граничные условия в виде  $E_z = E_\varphi = 0$  на бесконечно проводящей внутренней поверхности ограниченной эллиптической области, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left[ -\left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \frac{4q_1}{e^2} \right) \frac{4q_2}{e^2} \frac{Ce'_m(\xi_0, q_1)}{Ce_m(\xi_0, q_1)} + \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \frac{4q_2}{e^2} \right) \frac{4q_1}{e^2} \frac{Ce'_m(\xi_0, q_2)}{Ce_m(\xi_0, q_2)} \right] +$$

$$+ j \frac{\gamma^2 \varepsilon k a^2 \Lambda_1 \Lambda_2}{\mu^2} \left\{ \frac{ce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} - \frac{ce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \right\} + j \frac{\gamma^3 w \varepsilon k}{\mu^2} \left\{ \frac{ce'_m(\varphi, q_1)}{ce_m(\varphi, q_1)} \Lambda_1 - \frac{ce'_m(\varphi, q_2)}{ce_m(\varphi, q_2)} \Lambda_2 \right\} = 0, \quad (8)$$

где  $k_\perp^2 = w^2 \varepsilon \mu_\perp$ ,  $ce_m(\varphi, q_{1,2})$  – четные обыкновенные функции Матье I рода целого порядка  $m$  и их производные  $ce'_m(\varphi, q_{1,2})$ ;  $Ce_m(\xi, q_{1,2})$  – четные присоединенные (модифицированные) функции Матье I рода (с целым индексом) и их производные  $Ce'_m(\xi, q_{1,2})$ ,  $\xi_0$  – граничный эллипс,

$q_1 = \frac{e^2 \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \Lambda_1 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right)}{4}$  и  $q_2 = \frac{e^2 \left( k_\perp^2 - \gamma^2 - \Lambda_2 \gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \right)}{4}$  – параметры функций Матье,  $\Lambda_{1,2}$  – корни уравнения

$$\gamma w \varepsilon \frac{k}{\mu} \Lambda^2 + \left( w^2 \varepsilon \mu_\parallel - \frac{\mu_\parallel}{\mu} \gamma^2 - w^2 \varepsilon \mu_\perp + \gamma^2 \right) \Lambda - \gamma w \mu_\parallel \frac{k}{\mu} = 0.$$

Известно, что в ограниченных эллиптических областях распространяются четные и нечетные волны [7]. Выражение (8) описывает распространение четных волн. Для получения дисперсионного уравнения для нечетных волн в (8) надо сделать следующую замену:

$$\begin{cases} Ce(\xi_0, q_{1,2}) \rightarrow Se(\xi_0, q_{1,2}), Ce'(\xi_0, q_{1,2}) \rightarrow Se'(\xi_0, q_{1,2}); \\ ce(\varphi, q_{1,2}) \rightarrow se(\varphi, q_{1,2}), ce'(\varphi, q_{1,2}) \rightarrow se'(\varphi, q_{1,2}), \end{cases} \quad (9)$$

где  $Se(\xi_0, q_{1,2}), Se'(\xi_0, q_{1,2})$  – нечетные присоединенные (модифицированные) функции Матье I рода (с целым индексом) и их производные,  $se(\varphi, q_{1,2}), se'(\varphi, q_{1,2})$  – нечетные обыкновенные функции Матье I рода целого порядка  $m$  и их производные.

### Графики численных решений

Так как дисперсионные уравнения (8) не решаются аналитически, то их анализ проводился численно. Для этого был составлен комплекс программ на основе программного пакета Maple. Полученные результаты по-



звolyают проводить численный анализ дисперсионных уравнений (8) для различных сечений ограниченной эллиптической области и степени гиротропии заполнения.

На рисунке 1 представлены графики зависимостей постоянных распространения  $\frac{\gamma_z}{k_z}$  от напряженности намагничивающего магнитного поля

$\frac{w_0}{w}$  для гиротропной эллиптической области при продольном намагничивании с длиной большой полуоси  $s=0,016$  м и эксцентриситетом  $E=0,75$  при частоте  $w = 6,28 \cdot 10^{10}$  Гц и намагниченности феррита  $w_M = 0,15 \cdot w$ .

На рисунке 1 нижние индексы «С» и «S» означают четную и нечетную моды, верхние индексы «+» и «-» означают правое и левое направления вращения, каждая цифра нижних индексов «11» и «12» определяет число полуволн, укладываемых вдоль поперечных координатных осей эллиптической ограниченной области: первая цифра означает периодичность поля по координате  $\varphi$ , а вторая – по  $\xi$ . При  $\frac{w_0}{w} = 1$  наступает ферромагнитный резонанс (на рис. 1 – вертикальная пунктирная линия).

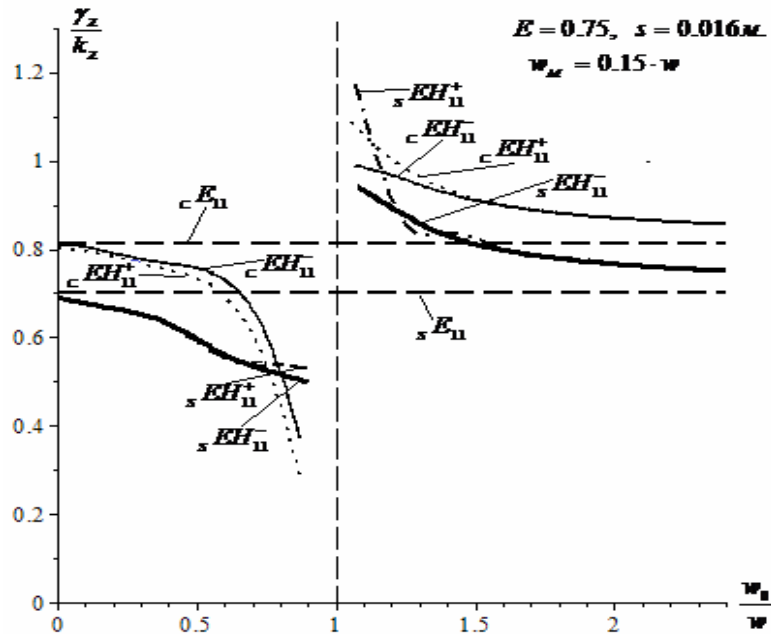


Рис. 1. Зависимости постоянных распространения различных мод от напряженности намагничивающего поля для эксцентриситета  $E=0,75$ , полученные при решении уравнений (8) (показаны только EH- моды).

На рисунке 1 горизонтальными пунктирными линиями показаны моды при отсутствии магнитного поля:  $c E_{11}$ ,  $s E_{11}$ .

### Заклучение

При сравнении результатов (рис. 1) и графиков, представленных в [1], следует вывод, что при увеличении эксцентриситета эллипса  $E$  и намагниченности феррита  $\frac{w_M}{w}$  углы поворота плоскости поляризации становятся существеннее для эллиптических ограниченных областей.

Данный результат показывает практическое преимущество эллиптических направляющих систем перед круглыми при проектировании фазовращателей.

### Литература

1. Микаэлян А. Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. – Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 664 с.
2. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. – М.: Физматлит, 1994. – 464 с.
3. Ефимов И. Е., Шермина Г. А. Волноводные линии передачи. – М.: Связь, 1979. – 232 с.
4. Итигилов Г. Б., Ширапов Д. Ш. Метод инвариантных преобразований для определения поперечных компонент электромагнитного поля в гиротропных ограниченных областях // Вестник Бурятского государственного университета. – 2012. – Вып. 9. – С.162–166.
5. Итигилов Г. Б., Ширапов Д. Ш. Волновые уравнения электромагнитных волн в ограниченных областях с ферритовым заполнением с ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании // Вестник Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления. – 2012. – № 3(38). – С. 5–10.
6. Сул Г., Уокер Л. Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах: пер. с англ. / под ред. Г. Мироманова. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. – 192 с.
7. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложение функций Матье / пер. с англ. В. А. Братановского. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. – 475 с.

*Итигилов Гарма Борисович*, старший преподаватель кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [gablz@mail.ru](mailto:gablz@mail.ru), тел. 8(3012)215–314.

*Ширапов Дашадондок Шагдарович*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [shir@esstu.ru](mailto:shir@esstu.ru), тел. 8(3012)215–314.

*Олзоева Сэсэг Ивановна*, доктор технических наук, профессор кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [sseseg@yandex.ru](mailto:sseseg@yandex.ru), тел. 8(3012)215–314.

*Itigilov Garma Borisovich*, Senior Lecturer, department of electronic computing systems, East Siberian State University of Technologies and Management.

*Shirapov Dashadondok Shagdarovich*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the department of electronic computing systems, East Siberian State University of Technologies and Management.

*Olzoeva Seseq Ivanovna*, Doctor of Technical Sciences, Professor of the department of electronic computing systems, East Siberian State University of Technologies and Management.

УДК 519.2

© Ю. Л. Ломухин

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОМОДОВОГО ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ ВОЛН

В работе решена задача Френеля с учетом возбуждения встречных волн в диссипативных средах. Установлен многомодовый механизм отражения и преломления. Показано, что в граничащих средах наряду с отраженными и преломленными модами возбуждаются обратные волны и волны с отрицательным углом преломления.

**Ключевые слова:** встречные волны, многомодовое отражение и преломление волн.

© Yu. L. Lomukhin

## A MATHEMATICAL MODEL OF MULTIMODE REFLECTION AND REFRACTION OF WAVES

In the paper the Fresnel's problem with the account of the excitation of counter waves in dissipative media has been solved. A multimode mechanism of the reflection and refraction has been identified. It is shown that in the bordering media the backward waves and waves with a negative angle of refraction are excited along with reflection and refraction modes.

**Keywords:** counter-waves, multimode reflection and refraction of waves.

Существующее решение задачи Френеля (отражение и преломление плоских волн в однородных граничащих средах), как известно, является неоднозначным [1] и не объясняет механизма возбуждения волн с отрицательным углом преломления [2] и обратных волн [3].

В статье дадим решение задачи Френеля с учетом возбуждения в диссипативных средах встречных волн. Под встречными волнами мы понимаем излучение вторичными источниками волн в направлении, строго обратном к волне, полем которой наводятся эти источники – диполи.

Существование встречных волн следует из уравнений Максвелла. Действительно, пусть в среде  $j = 0$ ,  $\rho = 0$ , т. е. нет свободных зарядов, есть только связанные, тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{D} = 0, \\ \operatorname{rot} \bar{B} &= \mu_0 \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Материальное уравнение имеем в виде:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \\ \bar{B} &= \mu_0 (\bar{H} - \bar{M}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\bar{P}$  – дипольный момент единицы объема среды,  $\bar{M}$  – магнитный момент единицы объема.

Подставляя (2) в (1) и исключая поле  $\bar{H}$ , получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Уравнение (3) совместно с (2), как известно, описывает весьма своеобразный механизм взаимодействия поля с материальной средой. Действительно, из (2) следует, что поляризация наводится полем волны, распространяющаяся в среде. Из (3), в свою очередь, следует, что диполи, возникшие в результате поляризации, являются источниками волновых полей. Если учесть особенности направленности излучения диполей, то становится очевидным, что в материальных средах всегда возбуждаются встречные волны. На существование встречных волн указывает также частное и общее решение уравнения (3). Учитывая (2), уравнение (3) часто записывают в виде однородного волнового уравнения, в которой вводится параметр  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ . Через мнимую часть  $-\varepsilon''$  учитываются энергетические потери электромагнитных полей в средах, в том числе и часть потерь, связанная с излучением вторичных источников.

Необходимо, также отметить следующее. Встречные волны, возбужденные вторичными источниками, своим полем могут наводить поляризацию, т. е. образовывать «третичные» источники и т. д. Таким образом, электромагнитное поле в средах есть интегральный результат действия множества вторичных источников, множества «третичных» источников и т. д. В однородных средах этот эффект не проявляется поскольку амплитуды, фазы и направления встречных волн однозначно связаны с параметрами исходных волн. В граничащих средах из-за наличия границы раздела встречные волны будут распространяться в соответствии с законами преломления и отражения. А это означает, что они могут проникать в области, где исходной волны может и не быть.

Пусть имеем две однородные среды с  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + i\varepsilon_1''$ ,  $\varepsilon_1'' \ll \varepsilon_1'$ ,  $\mu_1$  и  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + i\varepsilon_2''$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  (среды не магнитные).

Разделим граничащие среды плоскостью  $x = 0$  на 4 области, рис. 1.

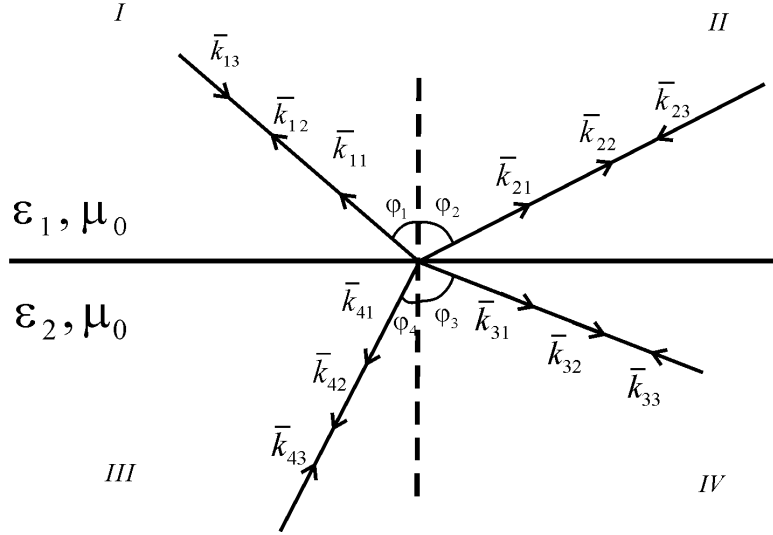


Рис.1

Построим систему собственных волн данной структуры. В соответствии с (3) в случае гармонических во времени волн, поля в первой и второй средах удовлетворяют следующим волновым уравнениям:

$$\Delta \bar{E}_1 + k_1^2 \bar{E}_1 = 0, \quad (4)$$

$$\Delta \bar{E}_2 + k_2^2 \bar{E}_2 = 0, \quad (5)$$

$k_1 = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1(\omega)}$ ,  $k_2 = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2(\omega)}$ , знаки  $\pm$  соответствуют исходным и встречным волнам.

Решение уравнений (4), (5) в каждой из четырех областей будем искать в виде суперпозиции трех волн: двух встречных с волновыми векторами  $\bar{k}_{12}$ ;  $\bar{k}_{13}$ ;  $\bar{k}_{22}$ ;  $\bar{k}_{23}$ ;  $\bar{k}_{32}$ ;  $\bar{k}_{33}$ ;  $\bar{k}_{42}$ ;  $\bar{k}_{43}$ ; и волн с волновыми векторами  $\bar{k}_{11}$ ,  $\bar{k}_{21}$ ,  $\bar{k}_{31}$ ,  $\bar{k}_{41}$ , возникающих из-за скачка диэлектрической проницаемости на границе раздела (рис. 2). Таким образом, пишем:

$$\bar{E}_1 = \sum_{j=1}^3 \bar{E}_{1j} \exp[i(\omega_{1j}t - (\bar{k}_{1j} \bar{r}))] + \sum_{j=1}^3 \bar{E}_{2j} \exp[i(\omega_{2j}t - (\bar{k}_{2j} \bar{r}))], \quad (6)$$

$$\bar{E}_2 = \sum_{j=1}^3 \bar{E}_{3j} \exp[i(\omega_{3j}t - (\bar{k}_{3j} \bar{r}))] + \sum_{j=1}^3 \bar{E}_{4j} \exp[i(\omega_{4j}t - (\bar{k}_{4j} \bar{r}))], \quad (7)$$

$$k_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{c} \sqrt{\varepsilon_{ij}(\omega_{ij})}, \quad i = 1,2; \quad j = 1,2,3.$$

$$\bar{k}_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{c} \sqrt{\varepsilon_{ij}(\omega_{ij})}, \quad i = 3,4; \quad j = 1,2,3; \quad \bar{r} = \bar{i}x + \bar{k}z.$$

Компоненты магнитных полей  $\overline{H}_1$  и  $\overline{H}_2$  определяем из уравнений Максвелла.

Представление решения в виде (6) и (7) исключает неоднозначность задачи. Электромагнитные поля должны удовлетворять граничным условиям:

$$\left[ \overline{n}(\overline{E}_1 - \overline{E}_2) \right] = 0, \quad (8)$$

$$\left[ \overline{n}(\overline{H}_1 - \overline{H}_2) \right] = 0, \quad z = 0. \quad (9)$$

Кроме того, должны быть удовлетворены предельные условия: при  $r \rightarrow \infty$ ,  $E_1$  и  $E_2 \rightarrow 0$ . Это условие удовлетворяется, так как  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – комплексные.

Подставляя  $\overline{E}_1$ ,  $\overline{E}_2$ ,  $\overline{H}_1$  и  $\overline{H}_2$  в (8), (9), получим два однородных уравнения, содержащих по 12 неизвестных амплитуд  $\overline{E}_{ij}$ ,  $i = 1,2,3,4$ ;  $j = 1,2,3$ . Группируя в этих уравнениях слагаемые в 4 группы по три волны по принципу “падающая, отраженная, преломленная” и приравнивая каждую группу нулю, получим систему восьми независимых однородных уравнения. Пользуясь условиями однозначного решения этих уравнений, определяем связи между амплитудами трех волн, входящих в эти группы. Для наглядности удобно схематично представить распределение собственных волн по четырем областям и их возможные направления распространения (рис. 2).

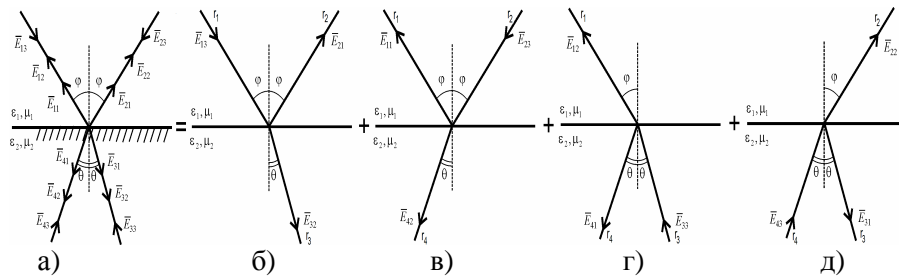


Рис. 2

Из рис. 2 видны четыре группы по 3 волны. Система собственных мод в граничащих средах (рис. 2а) есть наложение структур (рис. 2б, в, г). Как видно, собственные волны заполняют все области в средах, следовательно, при возбуждении граничащих сред во всех четырех областях будут возбуждаться волны.

Пусть, например, в первой среде в направлении  $\overline{E}_{13}^{\perp\perp}$  падает плоская волна  $\overline{E}_{13}^{\perp\perp} = \overline{E}_0^{\perp\perp} e^{-2k_1 r_1}$ , тогда в первой области мы имеем:

$$\overline{E}_1^{\perp\perp}(\varphi) = \overline{E}_{13}^{\perp\perp} + \overline{E}_{12}^{\perp\perp} + \overline{E}_{11}^{\perp\perp}.$$

Во второй области

$$\overline{E}_2^{\perp\perp}(\varphi) = \overline{E}_{21}^{\perp\perp} + \overline{E}_{22}^{\perp\perp} + \overline{E}_{23}^{\perp\perp}.$$

В третьей области

$$\overline{E}_3^{\parallel\perp}(\varphi) = \overline{E}_{32}^{\parallel\perp} + \overline{E}_{31}^{\parallel\perp} + \overline{E}_{33}^{\parallel\perp}.$$

В четвертой области

$$\overline{E}_4^{\parallel\perp}(\varphi) = \overline{E}_{41}^{\parallel\perp} + \overline{E}_{42}^{\parallel\perp} + \overline{E}_{43}^{\parallel\perp}.$$

Учтены связи между волнами в группах, а также тот очевидный факт, что моды, распространяющиеся в сторону границы, могут быть только встречными к возбуждающим их волнам, бегущим от границы. Кроме того, встречные волны в нашем случае практически не возбуждаются в первой среде, поскольку в ней отсутствуют потери, в том числе радиационные. Также следует учесть, что поскольку вторая среда поглощающая, то волны, распространяющиеся вглубь среды, будут неоднородными и затухающими. Стало быть, наиболее эффективной пространственной областью возбуждения встречных волн является расстояние, пройденное первичной неоднородной волной при котором ее энергии еще хватает на работу по переводу атомных или молекулярных осцилляторов на минимальный энергетический уровень, при переходе с которого диполи еще излучают. Предполагая, что среды представляют собой набор квантовых осцилляторов можно показать, что максимальная глубина, до которой возбуждаются встречные волны, оценивается величиной

$$h_2 = h_{20} \cos\theta, \quad h_{20} = \frac{1}{\text{Im}k_2}.$$

В электродинамике – это скин-слой, в ра-

диокации – это максимальная глубина проникновения. Следует учесть также весьма важный момент: в квантовой механике доказывается, что дипольный момент диполя, возбужденного падающей волной прямо пропорционален амплитуде этой волны. Учитывая сделанные замечания, в данной задаче можем построить следующие волновые функции:

в первой области – области обратных волн

$$\overline{E}_1^{\parallel\perp}(\varphi) = \overline{E}_0^{\parallel\perp} e^{-2ik_1r_1} \alpha_1^{\parallel\perp} \left[ 1 - [V_{1,2}^{\parallel\perp}(\varphi)]^2 \right] e^{-2ik_2h_2}, \quad (10)$$

во второй области – области отраженных волн

$$\overline{E}_2^{\parallel\perp}(\varphi) = \overline{E}_0^{\parallel\perp} e^{-ik_1(r_1+r_2)} \alpha_2^{\parallel\perp} V_{1,2}^{\parallel\perp}(\varphi), \quad (11)$$

в третьей области – области преломленных волн

$$\overline{E}_3^{\parallel\perp}(\varphi) = \overline{E}_0^{\parallel\perp} e^{-ik_1r_1} e^{-ik_2r_3} \alpha_3^{\parallel\perp} T_{1,2}^{\parallel\perp}(\varphi) \left[ 1 + [V_{2,1}^{\parallel\perp}(\varphi)]^2 \right] e^{-4ik_2h_2}, \quad (12)$$

в четвертой области – области отрицательного преломления

$$\overline{E}_4^{\parallel\perp}(\varphi) = -\overline{E}_0^{\parallel\perp} e^{-ik_1r_1} e^{-ik_2r_4} 2\alpha_3^{\parallel\perp} T_{1,2}^{\parallel\perp}(\varphi) V_{1,2}^{\parallel\perp}(\varphi) e^{-2ik_2h_2}. \quad (13)$$

В (10), (11), (12), (13) введены коэффициенты  $\alpha_1^{\parallel\perp}$ ,  $\alpha_2^{\parallel\perp}$ ,  $\alpha_3^{\parallel\perp}$ ,  $\alpha_4^{\parallel\perp}$ , которые определяем из условия шивания полей в плоскости  $x = 0$ . Эти условия имеют вид:

$$\overline{E}_1^{\parallel\perp}(0) = \overline{E}_2^{\parallel\perp}(0) = \overline{E}_0^{\parallel\perp} e^{-2ik_1r_1} \left[ V_{1,2}^{\parallel\perp}(0) + T_{1,2}^{\parallel\perp}(0) T_{2,1}^{\parallel\perp}(0) e^{-2ik_2h_{20}} \right], \quad (14)$$



$$\bar{E}_3^{\parallel\perp}(0) = \bar{E}_4^{\parallel\perp}(0) = \bar{E}_0^{\parallel\perp} e^{-i(k_1 r_1 + k_2 r_3)} \left[ T_{1,2}^{\parallel\perp}(0) + V_{2,1}^{\parallel\perp}(0) e^{-2ik_2 h_{20}} \right]. \quad (15)$$

Подставляя (9), (10), (11), (12) в (13), (14), находим

$$\alpha_1^{\parallel\perp} = 1 + \frac{V_{1,2}^{\parallel\perp}(0)}{1 - [V_{1,2}^{\parallel\perp}(0)]^2 e^{-2ik_2 h_{20}}},$$

$$\alpha_2^{\parallel\perp} = \frac{V_{1,2}^{\parallel\perp}(0) + T_{1,2}^{\parallel\perp}(0) T_{2,1}^{\parallel\perp}(0) e^{-2ik_2 h_{20}}}{V_{1,2}^{\parallel\perp}(0)},$$

$$\alpha_3^{\parallel\perp} = \frac{T_{1,2}^{\parallel\perp}(0) + V_{2,1}^{\parallel\perp}(0) e^{-2ik_2 h_{20}}}{T_{1,2}^{\parallel\perp}(0) \left[ 1 + [V_{2,1}^{\parallel\perp}(\varphi)]^2 e^{-4ik_2 h_2} \right]},$$

$$\alpha_4^{\parallel\perp} = \frac{T_{1,2}^{\parallel\perp}(0) + V_{2,1}^{\parallel\perp}(0) e^{-2ik_2 h_{20}}}{2T_{1,2}^{\parallel\perp}(0) V_{1,2}^{\parallel\perp}(0) e^{-2ik_2 h_{20}}}.$$

Здесь  $V_{1,2}^{\parallel\perp}(\varphi) = \frac{z_1 \text{Cos} \phi - z_2 \text{Cos} \theta}{z_1 \text{Cos} \phi + z_2 \text{Cos} \theta}$ ,  $V_{1,2}^{\perp}(\varphi) = \frac{z_2 \text{Cos} \phi - z_1 \text{Cos} \theta}{z_2 \text{Cos} \phi + z_1 \text{Cos} \theta}$ ,

$$T_{1,2}^{\parallel\perp}(\varphi) = 1 + V_{1,2}^{\parallel\perp}(\varphi), \quad T_{2,1}^{\parallel\perp}(\varphi) = 1 + V_{2,1}^{\parallel\perp}(\theta), \quad V_{1,2}^{\parallel}(\varphi) = -V_{2,1}^{\parallel}(\theta),$$

$$z_1 = z_0 \sqrt{\varepsilon_1}, \quad z_2 = z_0 \sqrt{\varepsilon_2}, \quad z_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \quad \text{Cos} \theta = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \varphi}.$$

Расчеты, выполненные по (9), подтверждены экспериментальными данными [3].

Таким образом, в работе построена математическая модель многомодового отражения и преломления волн. Показано, что наряду с обычными отраженными и преломленными волнами, в граничащих однородных средах возбуждаются обратные волны и волны с отрицательным углом преломления.

В заключение отметим, что в настоящее время во многих публикациях дискутируется физический механизм возбуждения волн с отрицательным углом преломления в однородных изотропных граничащих средах. Автор работы [5] указывает на неверное представление механизма возбуждения отрицательного преломления в работе [6]. Такое заявление считаю поспешным. Во-первых, потому что оно не следует из [5], поскольку в [5] не предполагается и не рассматривается многомодовый механизм отражения и преломления волн. Во-вторых, работа [6] не связана с «неясностями работ Веселаго». К сожалению, досадные опечатки в [6] есть. В частности, экспоненту  $e^{3i(\bar{k}_{1,2} \bar{r}_{20})}$  следует заменить на  $e^{i(\bar{q}_{2,10} \bar{r}_{20})} e^{2ik_1,2h_2}$ ,  $h_2$  – максимальная глубина проникновения волн в среду.

Замечание, указанное в работе [8], считаю справедливым, но оно исчезает, если слова «радиояркая температура» заменить на «коэффициент излучения» и обратить внимание на формулу (3).

Автор благодарен за оказанное внимание к работам [6, 8] и за сделанные замечания [5, 7].

### Литература

1. Раутиан С. Б. Об отражении и преломлении на границе среды с отрицательной групповой скоростью // УФН. – 2008. – Т.178, №10. – С.1017–1024.
2. Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  // УФН. – 1967. – Т. 92, № 7. – С. 517–526.
3. Ломухин Ю. Л., Бутуханов В. П., Атутов Е. Б. Моделирование радиолокационного отражения и радиоизлучения граничащих земных сред методом вынужденных встречных волн // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2014. – Т.19, №12. – С.33–38.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. – М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1956. – Т.11. – 478 с.
5. Фисанов В. В. О преломлении в изотропную среду с отрицательными проницаемостями // Изв. вузов. Физика. – 2014. – Т. 57, № 5. – С. 111–116.
6. Ломухин Ю. Л. Свойства волны, преломленной под отрицательным углом // Вестник Бурятского государственного университета. – 2012. – Спецвып. Д. – С. 83–84.
7. Различие картин радарных и радиометрических измерений (на примере ледяного покрова эвтрофированного озера / Г. С. Бордонский, А. А. Гурулев, А. О. Орлов, С. В. Цыренжапов // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. – 2014. – Т.11, № 2. – С.228–240.
8. Ломухин Ю. Л. Радиояркостная температура и коэффициент обратного рассеяния // Вестник СибГАУ. – 2013. – № 5(51). – С. 141–143.

*Ломухин Юрий Лупонович*, доктор физико-математических наук, профессор Института физического материаловедения СО РАН, e-mail: [lomukhin\\_yuri@mail.ru](mailto:lomukhin_yuri@mail.ru), тел. 8(3012)433–841.

*Lomukhin Yuri Luponovich*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Physical Material Studies, SB RAS.

УДК 541.64: 539.3

© *В. В. Мантатов*

### КРИТЕРИЙ СТЕКЛОВАНИЯ РАСПЛАВА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕКЛОЛ В МОДЕЛИ ДЕЛОКАЛИЗАЦИИ АТОМА

Доля флуктуационного объема металлических стекол, замороженная при температуре стеклования, согласуется по величине с данными для аморфных органических полимеров и других стеклообразных систем. Значения энергии процесса делокализации кинетической единицы, ответственной за вязкое течение, для них и для неорганических стекол практически одинаковы. Механизм делокализации атома приводит к образованию флуктуационного объема, который может служить критерием стеклования, в частности для расплава металлических стекол. В изложении применяемой модели данный объем совпадает с флуктуационным свободным объемом и устраняет противоречия и недостатки, присущие этому понятию в трактовке ряда экспериментальных фактов.

**Ключевые слова:** модель делокализации атома, температура стеклования, вязкое течение стеклообразующего расплава, металлические стекла.

© *V. V. Mantatov*

### CRITERION OF GLASS TRANSITION AT MELT METALLIC GLASSES IN A MODEL OF ATOM DELOCALIZATION

The ratio of fluctuation volume of metallic glasses frozen at a temperature of glass transition agrees in magnitude with the data for amorphous organic polymers and other glassy systems. The energy values of the process of delocalization of kinetic unit, responsible for viscous flow are almost identical for them and for inorganic glasses. The mechanism of atom delocalization leads to the formation of fluctuation amount that can serve as a criterion of glass transition, in particular, for melt of metallic glasses. In the presentation of the applied model this volume coincides with the fluctuating free volume and eliminates the inherent contradictions and shortcomings of this concept in the treatment of a number of experimental facts.

**Keywords:** model of atom delocalization, glass transition temperature, the viscous flow of a glass forming melt, metallic glasses.

### Введение

Понижение температуры стеклообразующей жидкости до температуры стеклования  $T=T_g$  приводит к тому, что объемная доля флуктуационного объема системы  $f$  уменьшается до некоторого минимального значения  $f=f_g$  [1,2]

$$f_g = \left( \frac{\Delta V_e}{V} \right)_{T=T_g} \approx const \approx 0,02 \div 0,03,$$

ниже которого ( $T \leq T_g$ ) замораживаются процессы рождения и исчезновения возбужденных кинетических единиц, ответственных за вязкое течение. Оценку  $f_g$  можно получить, например, по данным о вязкости вблизи  $T_g$ .

Модель делокализации атома предлагает возможный механизм, согласно которому возбуждение (делокализация) кинетической единицы сводится к ее критическому смещению  $\Delta r_m$ , соответствующему максимуму силы межатомного (межмолекулярного) притяжения [1,2]. Такие кинетические единицы (атомы, группы атомов) названы «делокализованными атомами». В силикатных стеклах в роли «делокализованного атома» выступает мостиковый атом кислорода во фрагменте кремнийкислородной сетки Si-O-Si, а в аморфных полимерах – небольшой участок основной цепи макромолекулы (группа атомов в повторяющемся звене). Данный подход – модель делокализации атома основан на обобщении концепции флуктуационного свободного объема [3–6].

Важным параметром модели является флуктуационный объем стеклующейся системы, обусловленный критическими смещениями возбужденных атомов из равновесных положений,

$$\Delta V_e = (\pi r^2 \Delta r_m) N_e = N_e \Delta v_e,$$

где  $N_e$  – число возбужденных кинетических единиц,  $\pi r^2$  – площадь сечения атома,  $\Delta v_e$  – элементарный флуктуационный объем, необходимый для процесса возбуждения атома:

$$\Delta v_e = \pi r^2 \Delta r_m$$

Из термодинамической теории флуктуации плотности и модели делокализации атома следует связь объемной доли флуктуационного объема системы с относительной флуктуацией плотности в виде соотношения [7]:

$$f = \frac{v}{\Delta v_e} \left\langle \frac{\Delta \rho}{\rho} \right\rangle^2.$$

Здесь  $v=V/N$  – объем, приходящийся на кинетическую единицу.

Если принять, что флуктуация плотности  $\langle \Delta \rho / \rho \rangle^2 = 0$ , то флуктуационный объем аморфной среды будет равен нулю  $f=0$ . По этой и другим причинам  $V_e$  не совпадает со свободным объемом жидкостей и стекол, иначе с объемом межатомного пространства [2,6]. Задача настоящей работы – определить значения  $f_g$  и других параметров модели для металли-

ческих стекол (аморфных сплавов) и сравнить полученные результаты с данными для аморфных полимеров и неорганических стекол.

**Расчет параметров модели. Обсуждение результатов**

Зависимость времени релаксации  $\tau(T)$  и вязкости  $\eta(T)$  в области стеклования от температуры описывается уравнением Вильямса–Ландела–Ферри (ВЛФ) [4]

$$\ln a_T = -C_1 \frac{T - T_g}{T - T_g + C_2},$$

где  $a_T = \tau(T)/\tau(T_g) = \eta(T)/\eta(T_g)$ ,  $C_1$  и  $C_2$  – эмпирические постоянные, которые в рамках модели делокализации атома получают следующую трактовку [2]

$$C_1 = 1 / f_g, \tag{1}$$

$$C_2 = \beta_f / f_g, \tag{2}$$

$\beta_f = (df / dT)_{T_g}$  – коэффициент теплового расширения флуктуационного объема при температуре стеклования.

**Таблица 1**

Температуры плавления  $T_m$ , стеклования  $T_g$  и параметры уравнения Фогеля–Фульчера–Таммана для металлических стекол [8]

Аморфный сплав	$T_m$ , К	$T_g/T_m$	$T_g$ , К	$\eta_0$ , кПа·с	$B$ , К	$T_0$ , К
Ni	1725	0.25	430	2.0	4700	295
Ni <sub>62.4</sub> Nb <sub>37.6</sub>	1442	0.66	945	0.49	5380	810
Ni <sub>75</sub> Si <sub>8</sub> B <sub>17</sub>	1340	0.58	782	2.53	4280	670
Fe <sub>91</sub> B <sub>9</sub>	1628	0.37	600	14.1	4635	513
Fe <sub>89</sub> B <sub>11</sub>	1599	0.40	640	8.53	4625	515
Fe <sub>83</sub> B <sub>17</sub>	1448	0.52	760	3.3	4630	638
Fe <sub>41.5</sub> Ni <sub>41.5</sub> B <sub>17</sub>	1352	0.53	720	3.78	4500	601
Fe <sub>79</sub> Si <sub>10</sub> B <sub>11</sub>	1419	0.58	818	1.9	4505	701
Fe <sub>80</sub> P <sub>13</sub> C <sub>7</sub>	1258	0.59	736	2.25	4600	616
Pd <sub>82</sub> Si <sub>18</sub>	1071	0.61	657	6.32	3730	557
Pd <sub>77.5</sub> Cu <sub>6</sub> Si <sub>16.5</sub>	1015	0.64	653	2.57	3820	553
Pd <sub>40</sub> Ni <sub>40</sub> P <sub>20</sub>	916	0.66	602	1.5	3600	509
Pt <sub>60</sub> Ni <sub>15</sub> P <sub>25</sub>	875	0.57	500	5.31	3560	405
Te	723	0.40	290	0.13	3790	198
Co <sub>75</sub> Si <sub>15</sub> B <sub>10</sub>	1393	0.56	785	2.87	4190	675
Ge	1210	0.62	750	18.3	1930	700

Уравнение ВЛФ фактически эквивалентно известному уравнению Фогеля–Фульчера–Таммана (ФФТ)

$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{B}{T - T_0}\right).$$

Константы этих формул образуют следующую связь [5]:

$$C_1 = \frac{B}{T_g - T_0}, \quad C_2 = T_g - T_0$$

далее с учетом (1) и (2) есть возможность для расчета  $f_g$  и  $\beta_f$  по параметрам уравнения ФФТ

$$f_g = \frac{T_g - T_0}{B}, \quad \beta_f = 1/B$$

В таблице 1 приводятся значения параметров уравнения ФФТ для ряда металлических стекол, заимствованные из работы японских исследователей [8], а в таблице 2 – рассчитанные на их основе параметры модели делокализации атома.

Следует обратить внимание на тот факт, что доля флуктуационного объема аморфных металлических сплавов, замороженная при температуре стеклования, нечувствительна к структуре и химическому составу этих систем (табл. 2)

$$f_g \approx const \approx 0,025 \div 0,027,$$

**Таблица 2**

Параметры теории флуктуационного свободного объема для металлических стекол (использованы данные [8], см. табл. 1)

Аморфный сплав	$c_1$	$c_2, \text{K}$	$f_g$	$\beta_f \cdot 10^4, \text{K}^{-1}$	$\beta_f T_g$	$\Delta \varepsilon_e (1)$	$U_\infty (2)$	$U_g (3)$
						кДж/моль		
Ni	34.8	135	0.029	2.1	0.09	13	39	124
Ni <sub>62.4</sub> Nb <sub>37.6</sub>	39.9	135	0.025	1.9	0.17	29	45	313
Ni <sub>75</sub> Si <sub>8</sub> B <sub>17</sub>	38.2	112	0.026	2.3	0.18	24	36	248
Fe <sub>91</sub> B <sub>9</sub>	53.3	87	0.019	2.2	0.13	20	38	266
Fe <sub>89</sub> B <sub>11</sub>	37.0	125	0.027	2.2	0.13	19	38	197
Fe <sub>83</sub> B <sub>17</sub>	38.0	122	0.026	2.2	0.16	23	38	240
Fe <sub>41.5</sub> Ni <sub>41.5</sub> B <sub>17</sub>	37.8	119	0.026	2.2	0.16	22	37	226
Fe <sub>79</sub> Si <sub>10</sub> B <sub>11</sub>	38.5	117	0.026	2.2	0.18	25	37	262
Fe <sub>80</sub> P <sub>13</sub> C <sub>7</sub>	38.3	120	0.026	2.2	0.16	22	38	234
Pd <sub>82</sub> Si <sub>18</sub>	37.3	100	0.027	2.7	0.18	20	31	204
Pd <sub>77.5</sub> Cu <sub>6</sub> Si <sub>16.5</sub>	38.2	100	0.026	2.6	0.17	20	32	207
Pd <sub>40</sub> Ni <sub>40</sub> P <sub>20</sub>	38.7	93	0.026	2.8	0.17	18	30	194
Pt <sub>60</sub> Ni <sub>15</sub> P <sub>25</sub>	37.5	95	0.027	2.8	0.14	15	30	156
Te	41.2	92	0.024	2.6	0.07	9	31	99
Co <sub>75</sub> Si <sub>15</sub> B <sub>10</sub>	38.1	110	0.026	2.4	0.19	24	35	248
Ge	38.6	50	0.026	2.3	0.39	23	16	241

Примечание:  $c_1 = B/(T_g - T_0)$ ,  $c_2 = T_g - T_0$

и совпадает с данными для аморфных органических полимеров и неорганических стекол (табл. 3).

Имеющиеся данные  $f_g$  и  $T_g$  позволяют оценить энергию процесса возбуждения атома [1,2]

$$\Delta\varepsilon_e \cong kT_g \ln(1/f_g) \quad (3)$$

Величина  $\Delta\varepsilon_e \cong 12\text{--}25$  кДж/моль для аморфных сплавов (табл. 2) совпадает с такими же величинами для неорганических стекол (табл. 3). По-видимому, образование делокализованного атома в металлических стеклах представляет собой низкоэнергетический мелкомасштабный процесс, как и в других стеклообразных системах [2]. Для исследованных аморфных сплавов по формуле [9]

$$U_g = C_1 kT_g \quad (4)$$

вычисляли энергию активации вязкого течения при температуре стеклования  $U_g=U(T_g)$ . Полученные значения  $U_g \approx 120\text{--}250$  кДж/моль (табл. 2) по порядку величины близки к данным для неорганических стекол (табл. 3).

**Таблица 3**

Постоянные уравнений ВЛФ и параметры теории флуктуационного свободного объема для аморфных полимеров и неорганических стекол [2,4–6]

Стекло	$T_g$ , К	$c_1$	$c_2$ , К	$f_g$	$\beta_f \cdot 10^4$	$\Delta\beta \cdot 10^4$	$\Delta\varepsilon_e$	$U_\infty$	$U_g$
					К <sup>-1</sup>				
Поливинилацетат	305	35.9	46.8	0.028	5.9	5	9.2	14	91
Натуральный каучук	300	38.4	53.6	0.026	4.8	4	9.2	17	96
Метакрилатные полимеры:									
этиловый	335	40.5	65.5	0.025	3.7	3	10.5	22	113
<i>n</i> -бутиловый	300	39.1	96.6	0.026	2.6	3	9.2	31	97
<i>n</i> -октиловый	253	37.0	107.3	0.027	2.5	2.5	7.5	33	78
Na <sub>2</sub> O-SiO <sub>2</sub>									
Na <sub>2</sub> O, мол. %									
19.0	746	38	317	0.026	0.86	-	22.6	100	235
32.9	704	36	275	0.028	1.03	0.86	20.9	83	210
44.8	667	44	211	0.023	1.08	1.39	20.9	78	244
K <sub>2</sub> O-B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>									
K <sub>2</sub> O, мол.%									
0	578	29.6	121.4	0.034	2.9	-	16.3	30	142
2.1	586	29.7	89.0	0.034	3.8	-	16.5	22	144
8.5	623	33.4	116.9	0.030	2.6	-	18.4	32	173
23.5	712	36.0	140.4	0.028	2.0	-	21.2	42	213
34.4	701	38.4	142.1	0.026	1.8	-	21.2	45	223
Na <sub>2</sub> O-GeO <sub>2</sub>									
Na <sub>2</sub> O, мол.%									
5	729	40.0	220	0.025	1.1	-	22.6	73	242
25	755	40.0	160	0.025	1.6	-	23.4	53	250
Na <sub>2</sub> O-PbO-SiO <sub>2</sub>									
761	32.2	280	0.031	1.1	1.0	22.1	75	203	
Na <sub>2</sub> O-CaO-SiO <sub>2</sub>									
833	36.8	320	0.027	0.9	0.9	25.2	98	254	
Se	303	32.4	57.7	0.031	5.4	2.7	8.8	15	81

Примечание:  $U_\infty = R \cdot c_1 \cdot c_2$ ,  $f_g = 1/c_1$ ,  $\beta_f = 1/c_1 \cdot c_2$

Значения коэффициента теплового расширения флуктуационного объема аморфных сплавов вблизи  $T_g$  (табл. 2)

$$\beta_f = 1/C_1 C_2 \approx (2,0 - 2,8) \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \quad (5)$$

совпадает с данными для калиевооборотных стекол (табл. 3). Величина  $\beta_f$  для многих стеклообразных систем совпадает со скачком коэффициента теплового расширения  $\Delta\beta$  при температуре стеклования (табл. 3) [4,5].

В области стеклования жидкостей и полимеров наряду с постоянством  $f_g \approx const$  установлены другие универсальные эмпирические и полуэмпирические правила и соотношения (см. [5,10]), например, известное правило Симхи–Бойера

$$\Delta\beta T_g \approx const \approx 0,1.$$



Полагая  $\beta_f \approx \Delta\beta$ , мы проверили постоянство произведения  $\beta_f T_g$  для рассмотренных металлических стекол (табл. 2). За исключением ряда аморфных сплавов (Ni, Te, Ge), приближенно выполняется постоянство этого произведения:  $\beta_f T_g \approx const \approx 0,13-0,17$ .

В физике аморфных полимеров и стекол получил наибольшее распространение другой свободный объем, понятие о котором восходит к классическим работам Френкеля [14] и Эйринга [15] по дырочной теории жидкостей. Его называют часто флуктуационным [4,5], иногда избыточным [12] свободным объемом. Он обеспечивает молекулярную подвижность и играет доминирующую роль в молекулярно-кинетических процессах, в частности, в вязком течении жидкостей и аморфных веществ. Его объемная доля, замороженная при температуре стеклования, составляет около 2–4% [4,5], что на порядок величины меньше доли геометрического структурно обусловленного свободного объема.

### Заключение

Если принять, что образование флуктуационной дырки происходит по механизму возбуждения кинетической единицы, то флуктуационный свободный объем совпадает с флуктуационным объемом в модели делокализации атома. Нетрудно заметить, что при такой интерпретации параметры теории флуктуационного свободного объема [2,5] приобретают другой физический смысл. В частности, объем дырки  $v_h$  приобретает смысл объема процесса возбуждения атома  $\Delta v_e$ , который определяется размером частицы ( $\pi r^2$ ) и масштабом предельной деформации межатомной связи ( $\Delta r_m$ ), а число дырок  $N_h$  – числом возбужденных атомов  $N_e$ . С этой точки зрения флуктуационный свободный объем  $v_f = v_h N_h$  следует рассматривать как объем  $\Delta V_e = N_e \Delta v_e$ , возникающий в результате критических смещений возбужденных атомов. Отсюда видно, что величина  $V_f = \Delta V_e$  не является свободным объемом в геометрическом смысле. Поэтому ее целесообразно назвать просто «флуктуационным объемом», а теорию свободного объема переименовать как «модель делокализации атома».

### Литература

1. Сандитов Д. С. Условие стеклования жидкостей и критерий плавления Линдемана в модели возбужденных атомов // ДАН. – 2003. – Т. 390, № 2. – С. 209.
2. Сандитов Д. С. Модель возбужденного состояния и вязкоупругие свойства аморфных полимеров и стекол // Высокомолек. соед. А. – 2005. Т. 47, № 3. – С. 478.
3. Френкель Я. И. Введение в теорию металлов. – Л.:М.: Гостехиздат, 1948.
4. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: ИЛ, 1963.
5. Сандитов Д. С., Бартенев Г. М. Физические свойства неупорядоченных структур. – Новосибирск: Наука, 1982.

6. Сандитов Д. С., Сангадиев С. Ш. Флуктуационный свободный объем металлических стекол // *Высокомолек. соед. А.* – 1999. – Т. 41, № 6. – С. 977.

7. О критическом смещении возбужденных кинетических единиц в жидкостях и стеклах / Д. С. Сандитов, С. С. Бадмаев, Т. Н. Мельниченко, Б. Д. Сандитов // *Физ. и хим. стекла.* – 2007. – Т. 33, № 1. – С. 56.

8. Судзуки К., Фузимори Х., Хасимото К. Аморфные металлы. – М.: *Металлургия*, 1987.

9. Бартенев Г. М., Сандитов Д. С. Релаксационные процессы в стеклообразных системах // *Высокомолек. соед. Б.* – 1989. – Т. 30, № 10. – С. 748–751.

10. Бартенев Г. М., Сандитов Д. С. Релаксационные процессы в стеклообразных системах. – Новосибирск: *Наука*, 1986.

11. Аскадский А. А., Матвеев Ю. И. Химическое строение и физические свойства полимеров. – М.: *Химия*, 1983.

12. Избыточный свободный объем и механические свойства аморфных сплавов / В. И. Бетехтин, А. М. Глезер, А. Г. Кадомцев, А. Ю. Кипяткова // *ФТТ.* – 1998. – Т. 40, № 1. – С. 85.

13. Ростиашвили В. Г., Иржак В. И., Розенберг Б. А. Стеклование полимеров. – Л.: *Химия*, 1987.

14. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. – М.:Л.: *Изд-во АН СССР*, 1945.

15. Глесстон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей реакций. – М.: *ИЛ*, 1948.

*Мантатов Владимир Владимирович*, доктор физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Бурятского государственного университета, e-mail: [manv999@rambler.ru](mailto:manv999@rambler.ru), тел. 8–951–623–2611.

*Mantatov Vladimir Vladimirovich*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, department of general physics, Buryat State University.

УДК 620.9: 658.011.56

© А. Г. Олзоева, С. И. Олзоева

### **АВТОМАТИЗАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ**

Рассматриваются принципы разработки инструментария при решении задач распараллеливания имитационного моделирования исследуемой сложной системы.

**Ключевые слова:** имитационное моделирование, вычислительные системы, программное обеспечение.

© A. G. Olzoeva, S. I. Olzoeva

### **AUTOMATION OF PARALLEL COMPUTING PROCESS AT SIMULATION MODELING**

The principles of tools development are discussed at solving the problems of parallelization of simulation modeling of the studied complex system.

**Keywords:** simulation modeling, computer systems, software.

#### **Введение**

Ускорение процесса имитационного моделирования сложных дискретно-событийных систем можно осуществить на многопроцессорных вычислительных системах. Существующие методы организации вычислительного процесса на таких системах невозможно применить к имитационному моделированию систем без соответствующей модификации, учитывающей специфику построения моделирующих алгоритмов сложных систем. Организация распределенного имитационного моделирования должна быть поддержана специальными инструментами, автоматизирующими как процесс создания параллельных имитационных моделей, так и процесс эффективной организации вычислительного процесса. К рассмотрению предлагаются состав и функциональное назначение программного инструментария для организации распределенного имитационного моделирования систем на неоднородных многопроцессорных вычислительных системах – локальных сетях и кластерах.

#### **Этапы организации**

В результате исследования методов теории распределенных вычислений и теории параллельных вычислений применительно к имитационному моделированию систем выделены основные этапы организации вычислительного процесса распределенного имитационного моделирования и задачи, стоящие на этих этапах. Эти задачи определяют функциональное содержание автоматизированного средства организации распределен-

ного имитационного моделирования. Основное назначение этого программного инструментария состоит в отделении аспектов, связанных с разработкой программного обеспечения имитационной модели (ИМ) конкретной сложной системы, от вопросов организации распределенных (параллельных) вычислений. Инструментарий предназначен для автоматизации работ построения параллельной структуры имитационной программы, выдачи оценок качества получаемых вариантов параллельной ИМ, прогнозируемого ускорения вычислительного процесса.

Технологическими этапами функционирования инструментария являются:

1. Построение структуры параллельной ИМ.

На этом этапе решается задача разбиения моделирующей программы на части, выполняющиеся параллельно на разных процессорах. Простое распределение модулей моделирующей программы по процессорам не способствует эффективному ускорению процесса имитации из-за многочисленных передач данных между модулями имитационной модели, сильно связанных по данным и управлению. Алгоритмическим наполнением данного этапа является метод декомпозиции имитационной модели конкретной исследуемой системы, основанный на алгоритме автоматической классификации [1]. Декомпозиция осуществляется по критерию минимизации связей между классами виртуальных действий имитационной модели. Алгоритм позволяет решить задачу декомпозиции с учетом не только структурной связности, но и с учетом характеристик динамической связности объектов конкретной моделируемой системы. По результатам декомпозиции формируется состав блоков распределенной имитационной модели (РИМ) и распределенная база данных модели.

2. Оценка качества вариантов проектов РИМ.

На данном этапе производится расчет прогнозируемого ускорения вычислений для вариантов распределенной имитационной модели. Используется метод оценки возможных временных факторов РИМ, по результатам которой производится выбор окончательного проекта РИМ.

3. Выбор алгоритма синхронизации распределенных процессов.

К сформированному составу РИМ применяется метод анализа и выбора алгоритма синхронизации распределенных процессов, который позволяет сравнить эффективность различных алгоритмов синхронизации для конкретной РИМ с заданными параметрами.

4. Формирование децентрализованной управляющей программы РИМ и распределенной базы данных моделирования.

Выбранный на предыдущем этапе наиболее подходящий алгоритм синхронизации для формируемой распределенной имитационной модели позволяет сформировать окончательную структуру децентрализованной управляющей программы.

5. Оптимальное распределение программных блоков ИМ по процессорам вычислительной системы.

Здесь решается задача планирования распределенного вычислительного процесса с помощью метода оптимального распределения программных блоков РИМ по процессорам вычислительной системы [2]. Выходные результаты используются для организации вычислительного процесса РИМ на неоднородных параллельных вычислительных системах – локальных сетях и кластерных системах.

### Заключение

Предлагаемый инструментарий является удобным средством для решения задачи распараллеливания ИМ исследуемой системы и перенесения имитационной программы на имеющийся в распоряжении пользователя парк компьютеров: локальную сеть или вычислительный кластер. Кроме того, обеспечивается эффективность и расширяемость распределенной имитационной модели. Эффективность достигается за счет использования нескольких процессоров, работающих параллельно, что позволяет ускорить процесс имитационного моделирования сложной системы.

Расширяемость РИМ обеспечивается структуризацией программ, обрабатывающих особые состояния моделируемой системы, стандартизацией базы данных моделирования, модульным принципом построения модели. Это позволяет вводить новые обрабатывающие модули имитационной модели, что может быть связано с изменением целей имитационного моделирования, а также вводить в обрабатывающие модули более подробные алгоритмы имитации в соответствии с требуемым уровнем детализации.

### Литература

1. Ширапов Д. Ш., Олзоева А. Г. Математическая модель декомпозиции имитационных моделей сложных систем // Информатизация процессов формирования открытых систем на основе СУБД, САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта: материалы VI Междунар. науч.-техн. конф. (Вологда, 24–25 июня 2011). – Вологда, 2011. – С. 215–218.
2. Олзоева С. И., Мархоев В. Ц., Олзоева А. Г. Оптимальная балансировка нагрузки в GRID-системах // Вестник Бурятского государственного Университета. – 2012. – Спецвып. В. – С. 220–223.

*Олзоева Аюна Геннадьевна*, аспирант кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [aunaol@mail.ru](mailto:aunaol@mail.ru), тел. 8(3012)215–314.

*Олзоева Сэсэг Ивановна*, доктор технических наук, профессор кафедры «Электронные вычислительные системы» Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, e-mail: [sseseg@yandex.ru](mailto:sseseg@yandex.ru), тел. 8(3012)215–314.

*А. Г. Олзоева, С. И. Олзоева.* Автоматизация параллельного вычислительного процесса при имитационном моделировании

---

*Olzoeva Ayuna Gennadevna*, postgraduate student, department of electronic computing systems, East-Siberian State University of Technologies and Management, Ulan-Ude.

*Olzoeva Seseg Ivanovna*, Doctor of Technical Sciences, Professor, department of electronic computing systems, East-Siberian State University of Technologies and Management, Ulan-Ude.

## 2. Управляемые системы и методы оптимизации

УДК 517.977

### МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВА НА ОСНОВЕ ЗАДАЧ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ\*

© А. С. Булдаев

Предлагается новый подход к поиску оптимальных параметров динамических систем с ограничениями типа равенства на основе построения и решения специальных задач о неподвижной точке определяемых операторов на допустимом множестве параметров.

**Ключевые слова:** параметрическая оптимизация системы, условия оптимальности, задача о неподвижной точке.

### METHODS OF PARAMETRIC OPTIMIZATION OF DYNAMIC SYSTEMS WITH EQUALITY TYPE CONSTRAINTS ON THE BASIS OF FIXED POINT PROBLEMS

© A. S. Buldaev

A new approach to a search of the optimal parameters of dynamical systems with equality constraints is proposed on the basis of construction and solution of special fixed point problems for operators constructed on the admissible set of parameters.

**Keywords:** parametric optimization of the system, conditions of optimality, fixed point problem.

#### Введение

Распространенным подходом к решению задач параметрической оптимизации динамических систем с ограничениями является использование методов решения конечномерных задач математического программирования с неявно заданными функциями от параметров [1]. Другой подход основывается на применении теории и методов оптимального управления, в частности, необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума [2, 3]. Предлагаемый в данной работе подход основывается на построении и реализации специальных необходимых условий оптималь-

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 12-01-00914-а, 12-01-98011-р\_сибирь\_а, 13-01-92200-Монг\_а

ности, интерпретируемых как задачи о неподвижной точке конструируемых операторов управления. Такие методы неподвижных точек ранее были построены и обоснованы в классах нелинейных задач параметрической оптимизации динамических систем без ограничений [4, 5]. В данной работе этот подход развивается для задач с ограничениями типа равенства.

### Задача параметрической оптимизации

Рассматривается задача оптимизации управляющих параметров с терминальными ограничениями типа равенства:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u \in U \subset R^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x(t), u, t) dt = 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (2)$$

$$\Phi_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) + \int_T F_0(x(t), u, t) dt \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (3)$$

в которой  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  – вектор состояния,  $u = (u_1, \dots, u_m)$  – вектор управляющих параметров. В качестве доступных управлений рассматриваются векторы параметров со значениями в компактном выпуклом множестве  $U \subset R^m$ . Начальное состояние  $x^0$  и интервал  $T$  заданы. Функции  $\varphi_i(x)$ ,  $F_i(x, u, t)$ ,  $i = \overline{1, r}$ , векторная функция  $f(x, u, t)$  и их производные по  $x$  и  $u$  непрерывны по совокупности аргументов  $(x, u, t)$  на соответствующих множествах  $R^n$  и  $R^n \times U \times T$ . Функция  $f(x, u, t)$  удовлетворяет условию Липшица по  $x$  в  $R^n \times U \times T$  с константой  $L > 0$

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leq L \|x - y\|.$$

Рассматриваемые условия гарантируют существование и единственность решения  $x(t, v)$ ,  $t \in T$  системы (1) для любого доступного управления  $v \in U$ . Доступное управление  $u \in U$  называется допустимым, если выполняются функциональные ограничения (2).

Определим функцию Понтрягина с вектором  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \in R^{r+1}$

$$H(\lambda, \psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - \sum_{i=0}^r \lambda_i F_i(x, u, t).$$

Для управления  $v \in V$  обозначим  $\psi(t, v, \lambda)$ ,  $t \in T$  – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\lambda, \psi(t), x(t), u, t), \quad \psi(t_1) = -\sum_{i=0}^r \lambda_i \varphi_{ix}(x(t_1))$$

при  $x(t) = x(t, u)$ ,  $u(t) = v(t)$ ,  $t \in T$ .

Известное необходимое условие оптимальности допустимого управления  $u \in U$  [2, 3] в форме дифференциального принципа максимума (ДПМ) в задаче (1)–(3) при некотором векторе  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq 0$ ,  $\lambda_0 = 0 \vee 1$  можно представить в форме:



$$u = \arg \max_{w \in U} \left\langle \int_T H_u(\lambda, \psi(t, u, \lambda), x(t, u), u, t) dt, w \right\rangle, \quad (4)$$

где  $H_u$  – производная по  $u$  функции Понтрягина.

Допустимое управление  $u \in U$ , удовлетворяющее условию (4) при некотором  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ,  $\lambda_0 = 1$ , называется регулярным управлением. Если все допустимые управления, удовлетворяющие условию (4), являются регулярными, то задача (1)–(3) называется регулярной. В противном случае задача (1)–(3) называется вырожденной.

Условие (4) с помощью оператора проектирования  $P_U$  на множество  $U$  в евклидовой норме можно также представить в эквивалентной проекционной форме:

$$u = P_U(u + \alpha \int_T H_u(\lambda, \psi(t, u, \lambda), x(t, u), u, t) dt), \quad \alpha > 0. \quad (5)$$

Отметим, что в силу линейности сопряженной системы ее решение можно записать в следующей форме:

$$\psi(t, v, \lambda) = \sum_{i=0}^r \lambda_i \psi^i(t, v),$$

в которой  $\psi^i(t, v)$  является решением сопряженной системы:

$$\dot{\psi}^i(t) = -H_x^i(\psi(t), x(t), u, t), \quad \psi^i(t_1) = -\varphi_{ix}(x(t_1))$$

с соответствующей функцией Понтрягина:

$$H^i(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - F_i(x, u, t)$$

в соответствующей задаче с целевой функцией  $\Phi_i(u)$ :

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x(t), u, t) dt \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Понятно, что выполняется соотношение:

$$H(\lambda, \psi, x, u, t) = \sum_{i=0}^r \lambda_i H^i(\psi, x, u, t).$$

Следовательно, функция  $H$  соответствует функции Понтрягина в задаче с целевой функцией Лагранжа

$$L(\lambda, u) = \sum_{i=0}^r \lambda_i \Phi_i(u),$$

и условия (4), (5) являются необходимыми условиями оптимальности (ДПМ) в задаче Лагранжа:

$$L(\lambda, u) = \sum_{i=0}^r \lambda_i \Phi_i(u) \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Таким образом, условие (4) можно записать в эквивалентном виде:

$$u = \arg \max_{w \in U} \left\langle \sum_{i=0}^r \lambda_i \int_T H_u^i(\psi^i(t, u), x(t, u), u, t) dt, w \right\rangle. \quad (6)$$

В приведенной классической форме условия (4) – (6) являются неконструктивными, так как остается открытым вопрос о выборе множителей Лагранжа.

### **Задачи о неподвижной точке с множителями Лагранжа**

*Задача на основе операции на максимум.*

Условие (4) вместе с условием допустимости управления

$$\Phi_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, r},$$

и условием нормировки

$$\lambda_0 = 0 \vee 1$$

представляют собой систему  $(m + r + 1)$  уравнений с неявно заданными  $(m + r + 1)$  неизвестными  $(u, \lambda)$ . Решив эту систему, можно определить точки  $u \in U$ , подозрительные на оптимальность и соответствующие им множители Лагранжа  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq 0$ .

Предположим, что задача (1)–(3) является регулярной ( $\lambda_0 = 1$ ). Тогда условие (4) с требованием допустимости управления (2) можно представить в форме следующей системы уравнений, имеющей форму задачи о неподвижной точке на множестве  $U \times R^r$ :

$$u = \arg \max_{w \in U} \left\langle \int_T H_u(\lambda, \psi(t, u, \lambda), x(t, u), u, t) dt, w \right\rangle, \quad (7)$$

$$\lambda_i = \lambda_i + \tau_i \Phi_i(u), \quad \tau_i \neq 0, \quad i = \overline{1, r},$$

в которой функция Понтрягина  $H$  является регулярной ( $\lambda_0 = 1$ ) и коэффициенты  $\tau_i \neq 0, i = \overline{1, r}$  заданы.

Для решения задачи (7) можно применить известный в вычислительной математике метод последовательных приближений и его модификации [6]. В частности метод простой итерации при  $k \geq 0$ , имеющий форму:

$$u^{k+1} = \arg \max_{w \in U} \left\langle \int_T H_u(\lambda^k, \psi(t, u^k, \lambda^k), x(t, u^k), u^k, t) dt, w \right\rangle, \quad (8)$$

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \tau_i \Phi_i(u^k), \quad \tau_i \neq 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

При  $k = 0$  задается начальное доступное приближение  $u^0 \in U, \lambda^0 \in R^r$ .

Для улучшения сходимости итерационного процесса задачу о неподвижной точке (7) можно преобразовать к эквивалентной задаче:

$$u = u + \delta(u - \arg \max_{w \in U} \left\langle \int_T H_u(\lambda, \psi(t, u, \lambda), x(t, u), u, t) dt, w \right\rangle),$$

$$\delta \neq 0,$$

$$\lambda_i = \lambda_i + \tau_i \Phi_i(u), \quad \tau_i \neq 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

Применяя метод простой итерации к эквивалентной задаче, получаем мо-

дификацию итерационного процесса (8):

$$u^{k+1} = u^k + \delta(u^k - \arg \max_{w \in U} \left\langle \int_T H_u(\lambda^k, \psi(t, u^k, \lambda^k), x(t, u^k), u^k, t) dt, w \right\rangle),$$

$$\delta \neq 0,$$

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \tau_i \Phi_i(u^k), \quad \tau_i \neq 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

Основным условием сходимости метода простой итерации является выполнение свойства «сжимания» [6] для оператора правой части задачи о неподвижной точке. Поэтому, выбирая достаточно малые коэффициенты  $\delta \neq 0$ ,  $\tau_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, r}$ , можно регулировать сходимость рассматриваемой модификации метода простой итерации.

*Задача на основе операции проектирования.*

Необходимое условие оптимальности в проекционной форме (5) с условием допустимости управления (2) в регулярной задаче (1)–(3) можно также рассматривать в виде задачи о неподвижной точке на множестве  $U \times R^r$ :

$$u = P_U(u + \alpha \int_T H_u(\lambda, \psi(t, u, \lambda), x(t, u), u, t) dt), \quad \alpha > 0,$$

$$\lambda_i = \lambda_i + \tau_i \Phi_i(u), \quad \tau_i \neq 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

Для решения задачи (9) можно использовать соответствующий итерационный метод последовательных приближений при  $k \geq 0$ :

$$u^{k+1} = P_U(u^k + \alpha \int_T H_u(\lambda^k, \psi(t, u^k, \lambda^k), x(t, u^k), u^k, t) dt),$$

$$\alpha > 0,$$

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \tau_i \Phi_i(u^k), \quad \tau_i \neq 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

Оператор задачи (9) в отличие от задачи (7) является однозначным и непрерывным ввиду свойств операции проектирования  $P_U$ . Это свойство существенно упрощает анализ решения задачи о неподвижной точке. При этом в качестве регулирующего параметра для анализа сходимости итерационного процесса (10) можно использовать непосредственно сам параметр проектирования  $\alpha > 0$ .

Проиллюстрируем в рамках задачи (9) еще один подход к решению, состоящий в последовательном решении двух вспомогательных задач о неподвижной точке.

Для заданного  $\alpha > 0$  проведем декомпозицию поставленной задачи (9) в регулярном случае на две подзадачи.

П 1. Для заданного  $\lambda \in R^{r+1}$ ,  $\lambda_0 = 1$  поиск решения задачи:

$$u = P_U(u + \alpha \int_T H_u(\lambda, \psi(t, u, \lambda), x(t, u), u, t) dt), \quad \alpha > 0. \quad (11)$$

Обозначим решение задачи (11) через  $u_\lambda \in U$  и соответствующую фазовую траекторию  $x^\alpha(t, \lambda) = x(t, u_\lambda)$ ,  $t \in T$ . Определим векторную функцию  $\Phi^\alpha(\lambda) = (\Phi_1^\alpha(\lambda), \dots, \Phi_r^\alpha(\lambda))$  с компонентами

$$\Phi_i^\alpha(\lambda) = \varphi_i(x^\alpha(t_1, \lambda)) + \int_T F_i(x^\alpha(t, \lambda), u_\lambda(t), t) dt, \quad i = \overline{1, r}.$$

П 2. Поиск решения системы уравнений с заданными  $\tau_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, r}$

$$\lambda_i = \lambda_i + \tau_i \Phi_i^\alpha(\lambda), \quad i = \overline{1, r}. \quad (12)$$

Понятно, что для решения  $\bar{\lambda} \in R^{r+1}$ ,  $\bar{\lambda}_0 = 1$  системы (12) соответствующее допустимое управление  $u_{\bar{\lambda}}$  удовлетворяет регулярному ДПМ в проекционной форме (5).

Для реализации соотношения (11) при фиксированном  $\lambda \in R^{r+1}$ ,  $\lambda_0 = 1$  можно применить явный итерационный процесс с индексом  $k \geq 0$  и начальным приближением  $u^0 \in U$

$$u^{k+1} = P_U(u^k + \alpha H_u(\lambda, \psi(t, u^k, \lambda), x(t, u^k), u^k, t)).$$

Для решения системы (12) можно использовать метод простых итераций при  $k \geq 0$  и начальным приближением  $\lambda^0 \in R^{r+1}$ ,  $\lambda_0^0 = 1$

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \tau_i \Phi_i^\alpha(\lambda^k), \quad i = \overline{1, r},$$

регулируя сходимость процесса выбором параметров  $\tau_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, r}$ .

Указанный подход можно рассматривать как неявный аналог известного подхода для решения систем уравнений, заключающегося в явном выражении части переменных системы уравнений через остальные переменные и переходе к эквивалентной системе меньшей размерности.

Аналогичный прием декомпозиции исходной задачи на две вспомогательные задачи можно использовать также для рассмотренных выше задач о неподвижной точке на основе операции на максимум.

### **Задача о неподвижной точке без множителей Лагранжа**

Обосновывается новый подход к поиску управлений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности в рассматриваемом классе задач параметрической параметризации с равенствами.

Приведем задачу (1)–(3) к эквивалентной форме с ограничениями типа неравенства:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u \in U \subset R^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (13)$$

$$\Phi_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x(t), u, t) dt \leq 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (14)$$

$$\Phi_i(u) = -\varphi_i(x(t_1)) - \int_T F_i(x(t), u, t) dt \leq 0, \quad i = \overline{r+1, 2r}, \quad (15)$$

$$\Phi_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) + \int_T F_0(x(t), u, t) dt \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (16)$$

Понятно, что в задаче (13)–(16) все ограничения типа неравенства являются активными:

$$\Phi_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, 2r}.$$

Определим множество  $I$  индексов активных ограничений вместе с индексом целевого функционала:

$$I = \{0\} \cup \{i = 1, \dots, 2r : \Phi_i(u) = 0\}.$$

Рассмотрим множество

$$\Lambda = \{\lambda = (\lambda_i, i \in I) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1\}.$$

Известное необходимое условие оптимальности допустимого управления  $u \in U$  [2, 3] (ДПМ) для задачи (13)–(16) при некотором  $\lambda \in \Lambda$  можно представить в виде неравенства:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \left\langle \int_T H_u^i(\psi^i(t, u), x(t, u), u, t) dt, w - u \right\rangle \leq 0, \quad w \in U. \quad (17)$$

Из неравенства (17) следует, что

$$\min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i \left\langle \int_T H_u^i(\psi^i(t, u), x(t, u), u, t) dt, w - u \right\rangle \leq 0, \quad w \in U. \quad (18)$$

Неравенство (18), согласно известному результату (Лемма 3.1 на стр. 108 в [7]), эквивалентно неравенству

$$\min_{i \in I} \left\langle \int_T H_u^i(\psi^i(t, u), x(t, u), u, t) dt, w - u \right\rangle \leq 0, \quad w \in U. \quad (19)$$

Таким образом, получаем следствие необходимого условия оптимальности (17) в форме соотношения (19) без множителей Лагранжа.

Условие (19) можно представить в форме следующей задачи о неподвижной точке на множестве  $U$  :

$$u = \arg \max_{w \in U} \min_{i \in I} \left\langle \int_T H_u^i(\psi^i(t, u), x(t, u), u, t) dt, w - u \right\rangle. \quad (20)$$

Для численного решения задачи (20) можно применить итерационный процесс простой итерации при  $k \geq 0$  и начальным приближением  $u^0 \in U$  :

$$u^{k+1} = \arg \max_{w \in U} \min_{i \in I} \left\langle \int_T H_u^i(\psi^i(t, u^k), x(t, u^k), u^k, t) dt, w - u^k \right\rangle$$

и его модификации для улучшения сходимости.

Отметим, что решения задачи (20) являются лишь доступными управлениями, т. е. ограничения типа равенства (2) не обязательно выполняются для решений задачи (20). Обозначим  $U^*$  множество решений задачи (20).

В итоге решение задачи о неподвижной точке (20) позволяет сузить множество  $U$  доступных управлений до множества  $U^*$  «приближенно-оптимальных» управлений, для которых выполняются необходимые условия оптимальности, но которые могут быть недопустимыми управлениями.

Дальнейший анализ полученных решений задачи о неподвижной точке (20) сводится к выбору среди них допустимых управлений, т. е. решению системы уравнений:

$$\Phi_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad u \in U^*. \quad (21)$$

Предлагаемый подход позволяет сделать важные выводы о существовании и структуре множества оптимальных управлений уже на первом этапе поиска приближенно-оптимальных управлений. Полученные приближенно-оптимальные управления могут быть использованы в качестве обоснованных начальных приближений для итерационных процессов решения задач о неподвижной точке с множителями Лагранжа, которые были рассмотрены в предыдущем разделе.

В целом разработанный подход можно рассматривать как последовательную декомпозицию задачи поиска управлений, удовлетворяющих необходимому условию оптимальности (19), на задачу поиска неподвижной точки на множестве доступных управлений (20) и задачу решения системы уравнений на полученном множестве неподвижных точек предыдущего этапа (21).

### Примеры

Проиллюстрируем предлагаемые методы неподвижных точек на простом примере:

$$\dot{x}(t) = u, \quad x(0) = 0, \quad u \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 1],$$

$$\Phi_1(u) = x(1) - a = 0,$$

$$\Phi_0(u) = \int_0^1 (x^2(t) - u^2) dt \rightarrow \min.$$

В данной задаче тривиально определяется единственное допустимое управление  $u = a$  при  $|a| \leq 1$ , которое в силу единственности является оптимальным. При  $|a| > 1$  в задаче нет допустимых управлений, т. е. задача не имеет решения.

Проведем анализ этой простой задачи предлагаемыми в работе методами.

*Метод с множителями Лагранжа.*

Имеем  $H = \psi u - \lambda_0(x^2 - u^2)$  и сопряженную систему:

$$\dot{\psi}(t) = 2\lambda_0 x(t), \quad \psi(1) = -\lambda_1.$$

Условие оптимальности (4) принимает вид:

$$u = \arg \max_{|w| \leq 1} \left\langle \int_T (\psi(t, u) + 2\lambda_0 u) dt, w \right\rangle.$$

В данном примере легко выписываются общие решения фазовой и сопряженной систем:  $x(t, u) = ut$ ,  $\psi(t, u) = \lambda_0 ut^2 - \lambda_0 u - \lambda_1$ ,  $t \in T$ ,  $u \in U$ , с помощью которых можно провести следующий анализ регулярности и вырожденности рассматриваемой задачи.

Предположим, что  $\lambda_0 = 0$  (вырожденная задача). В этом случае  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\psi(t, u) = -\lambda_1$ , и из условия оптимальности следует управление

$$u = \begin{cases} -1, & \lambda_1 > 0, \\ 1, & \lambda_1 < 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем для  $t \in T$

$$x(t) = \begin{cases} -t, & \lambda_1 > 0, \\ t, & \lambda_1 < 0. \end{cases}$$

Следовательно, если  $a \neq \pm 1$ , то получаем противоречие условию допустимости управления, т. е.  $x(1) \neq a$ .

Таким образом, в случае  $|a| \neq 1$  задача является регулярной.

В случае  $|a| = 1$  существуют допустимые управления и множители Лагранжа  $\lambda_1 \neq 0$  с  $\lambda_0 = 0$ , удовлетворяющие необходимому условию. В данном случае задача является вырожденной.

Далее проведем анализ существования неподвижных точек задачи вида (7) для регулярного случая  $|a| \neq 1$ .

Положим  $\lambda_0 = 1$ . Отсюда следует общее решение сопряженной системы  $\psi(t, u) = ut^2 - u - \lambda_1$ ,  $t \in T$  и задача о неподвижной точке с заданным  $\tau_1 \neq 0$ :

$$u = \arg \max_{|w| \leq 1} \left\langle \frac{4}{3}u - \lambda_1, w \right\rangle = \text{sign} \left( \frac{4}{3}u - \lambda_1 \right),$$

$$\lambda_1 = \lambda_1 + \tau_1(u - a).$$

Решениями первого уравнения являются граничные неподвижные точки:  $u = 1$  при  $\lambda_1 \leq \frac{4}{3}$ ;  $u = -1$  при  $\lambda_1 \geq -\frac{4}{3}$ ; а также внутренние неподвижные точки  $u = \frac{3}{4}\lambda_1 \in U$  при  $|\lambda_1| < \frac{4}{3}$ , удовлетворяющие условию:

$$\frac{4}{3}u - \lambda_1 = 0 \text{ (так называемые «особые» точки [4]).}$$

Из этих неподвижных точек условию допустимости управления (второе уравнение) удовлетворяют лишь особые точки  $u = \frac{3}{4}\lambda_1$  при  $\lambda_1 = \frac{4}{3}a$ . При этом условие доступности управления  $|\lambda_1| < \frac{4}{3}$  выполняется для  $|a| < 1$  и не выполняется при  $|a| > 1$ .

В итоге проведенного анализа получаем, что задача о неподвижной точке в регулярном случае при  $|a| < 1$  имеет единственное решение  $u = a$ , которому соответствует множитель Лагранжа  $\lambda_1 = \frac{4}{3}a$ . В силу указанной единственности, а также существования оптимального решения исходной задачи, управление  $u = a$  является оптимальным. При  $|a| > 1$  допустимых управлений нет, и задача оптимизации не имеет решения.

Таким образом, метод неподвижных точек с множителями Лагранжа в рассматриваемой регулярной задаче позволяет определить ее решение.

*Метод без множителей Лагранжа.*

Проведем анализ существования неподвижных точек задачи вида (20).

Задачу оптимизации приведем к требуемому эквивалентному виду с ограничениями типа неравенства:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u, \quad x(0) = 0, \quad u \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 1], \\ \Phi_1(u) &= x(1) - a \leq 0, \\ \Phi_2(u) &= -x(1) + a \leq 0, \\ \Phi_0(u) &= \int_0^1 (x^2(t) - u^2) dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

В полученной задаче:

1) функции Понтрягина  $H^1 = \psi u$  соответствует сопряженная система:  $\dot{\psi}(t) = 0$ ,  $\psi(1) = -1$ , которая имеет общее решение  $\psi^1(t, u) = -1$ ,  $t \in T$ ,  $u \in U$ ;

2) функции Понтрягина  $H^2 = \psi u$  соответствует сопряженная система:  $\dot{\psi}(t) = 0$ ,  $\psi(1) = 1$ , которая имеет общее решение  $\psi^2(t, u) = 1$ ,  $t \in T$ ,  $u \in U$ ;

3) функции Понтрягина  $H^0 = \psi u - (x^2 - u^2)$  соответствует сопряженная система:  $\dot{\psi}(t) = 2x$ ,  $\psi(1) = 0$ , которая имеет общее решение  $\psi^0(t, u) = ut^2 - u$ ,  $t \in T$ ,  $u \in U$ .

С учетом полученных выражений задача о неподвижной точке (20) в рассматриваемом примере принимает вид:

$$u = \arg \max_{|w| \leq 1} \min \left\{ -(w - u), (w - u), \frac{4}{3}u(w - u) \right\}.$$



Рассматривая несложную графическую интерпретацию этой задачи для различных случаев доступных значений  $|u| \leq 1$ , можно легко получить следующий вывод: любое доступное управление  $|u| \leq 1$  удовлетворяет этой задаче о неподвижной точке.

Дальнейший анализ условия допустимости  $x(1) = a$  для доступных управлений  $|u| \leq 1$  с помощью общего решения фазовой системы  $x(t, u) = ut$ ,  $t \in T$ ,  $u \in U$  приводит к единственному допустимому управлению  $u = a$  при  $|a| \leq 1$ . В силу единственности этого допустимого управления и существования оптимального решения исходной задачи данное управление является оптимальным. При  $|a| > 1$  допустимых управлений не существует, поэтому задача оптимизации не имеет решения.

Таким образом, в данном простом примере метод неподвижной точки без множителей Лагранжа позволяет получить полное решение оптимизационной задачи.

Рассмотренные примеры практического применения методов наглядно демонстрируют их основные конструкции и в определенной степени иллюстрируют работоспособность предлагаемых методов.

### Заключение

Предложены новые конструктивные подходы к поиску экстремальных управлений в рассматриваемом классе задач параметрической оптимизации с ограничениями типа равенства с помощью решения специальных задач о неподвижной точке определяемых операторов управления. Разработанные подходы выгодно отличаются от известных градиентных методов отсутствием трудоемкой операции варьирования допустимого управления на текущей итерации для обеспечения последовательного улучшения и допустимости итерационных приближений управления. Рассматриваемые итерационные процессы последовательных приближений для решения рассматриваемых задач о неподвижной точке сводят решение оптимизационной задачи к последовательному решению чередующихся фазовых и сопряженных задач Коши без операции варьирования управления на каждой итерации. При этом построены модификации процессов без использования множителей Лагранжа и обоснован выбор доступных начальных приближений для процессов. Указанные особенности являются важными факторами повышения вычислительной эффективности решения рассматриваемого класса нелинейных задач параметрической оптимизации с ограничениями типа равенства.

### Литература

1. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1994. – 344 с.

*А. С. Булдаев.* Методы параметрической оптимизации динамических систем с ограничениями типа равенства на основе задач о неподвижной точке

---

2. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

3. Методы решения задач математического программирования и оптимального управления. – Новосибирск: Наука, 1984. – 232 с.

4. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. – 260 с.

5. Булдаев А. С., Хишектуева И.-Х. Д. Методы неподвижных точек в задачах параметрической оптимизации систем // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №12. – С. 5–14.

6. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

7. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.

*Булдаев Александр Сергеевич*, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, директор Научно-образовательного инновационного центра системных исследований и автоматизации Бурятского государственного университета, e-mail: [buldaev@mail.ru](mailto:buldaev@mail.ru), тел. +7(3012)217–733.

*Buldaev Alexander Sergeevich*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, applied mathematics department, Buryat State University, Director of the Scientific and Educational Innovation Centre for System Studies and Automation, Buryat State University.

УДК 517.97

© *И. Д. Бурлаков*

**ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО АНАЛИЗУ  
ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА  
НЕЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ**

В статье приводятся результаты численных экспериментов по анализу эффективности проекционного метода нелокального улучшения в нелинейных задачах оптимального управления.

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, нелокальное улучшение, вычислительный эксперимент.

© *I. D. Burlakov*

**NUMERICAL EXPERIMENTS IN EFFECTIVENESS ANALYSIS OF  
PROJECTION METHOD FOR NONLOCAL IMPROVEMENT**

The article presents the results of numerical experiments on the analysis of effectiveness of the projection method for nonlocal improvement in nonlinear optimal control problems.

**Keywords:** optimal control problem, nonlocal improvement, numerical experiment.

**Введение**

Рассмотрим задачу оптимального управления со свободным правым концом:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \inf, \quad (3)$$

где  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния,  $u(t) \in R^r$  – вектор управления. Множество  $V$  кусочно-непрерывных на  $T$  функции со значениями в выпуклом компактном множестве  $U \subset R^r$  рассматривается в качестве множества допустимых управлений. Промежуток управления  $T$  и начальное состояние  $x_0$  заданы.

Также предполагаются выполненными условия, которые гарантируют существование и единственность решения  $x(t, v)$ ,  $t \in T$  системы (1)–(2) для любого допустимого управления  $v(t)$ ,  $t \in T$  [3, 8].

В статье задача (1)–(3) решается с применением модифицированного проекционного метода нелокального улучшения управлений с дифференциально-алгебраической сопряженной системой [4, 6, 7], описание которого приводится далее в итерационном виде.

### 1. Итерационный вид проекционного метода нелокального улучшения с дифференциально-алгебраической сопряженной системой

Рассмотрим дифференциально-алгебраическую сопряженную систему [4, 6]:

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t), x(t), w(t), t) - r(t), \quad (5)$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) - q, \quad (6)$$

$$H(p(t), y(t), w(t), t) - H(p(t), x(t), w(t), t) = \langle H_x(p(t), x(t), w(t), t) + r(t), y(t) - x(t) \rangle, \quad (7)$$

$$\varphi(y(t_1)) - \varphi(x(t_1)) = \langle \varphi_x(x(t_1)) + q, y(t_1) - x(t_1) \rangle, \quad (8)$$

где  $H(p, x, u, t) = \langle p, f(x, u, t) \rangle - F(x, u, t)$  – функция Понтрягина с сопряженной переменной  $p(t, u, v)$ . Величины  $r(t)$  и  $q$  выражаются из соответствующих алгебраических уравнений (7) и (8) (возможно и не единственным образом) [4, 6]. Эта модификация позволяет получить [6] формулу приращения целевой функции в задаче (1)–(3) без остаточных членов разложений.

Далее введем проекционное отображение:

$$u^\alpha(p, x, t) = P_U(u(t) + \alpha H_u(p, x, u, t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

где  $u \in V$  – допустимое управление,  $\alpha > 0$  – фиксированный параметр,  $P_U$  – оператор проектирования на множество  $U$  в евклидовой норме.

Тогда с помощью отображения  $u^\alpha$  дифференциальный принцип максимума (ДПМ) в задаче (1)–(3) для управления  $u \in V$  представляется в виде:

$$u(t) = u^\alpha(p(t, u, v), x(t, u), t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad \alpha > 0. \quad (4)$$

Для выполнения ДПМ достаточно проверить условие (4) хотя бы для одного  $\alpha > 0$ .

Предположим, что  $p(t, u, v)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  – решение дифференциально-алгебраической сопряженной системы (5)–(8) для допустимых управлений  $u, v$  при  $w(t) = u(t)$ ,  $x(t) = x(t, u)$ ,  $y(t) = x(t, v)$ . То есть, решив эту систему, можно однозначно определить отображение  $P(u, v) = p(t, u, v)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  на множестве  $V \times V$  (возможно, не единственным образом).

Решим проекционное отображение, применив метод проекционных возмущений [3], с параметром возмущения  $\alpha > 0$ , равным параметру проектирования:

$$v(t) = P_U \left( u(t) + \alpha \left( H_u \left( p(t, u, v), x(t, v), u(t), t \right) + s(t) \right) \right), \quad t \in T. \quad (9)$$

$s(t)$  находится из алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} & H \left( p(t, u, v), x(t, v), v(t), t \right) - H \left( p(t, u, v), x(t, v), u(t), t \right) = \\ & \left\langle H_u \left( p(t, u, v), x(t, v), u(t), t \right) + s(t), v(t) - u(t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

При  $\alpha = 0$  получается невозмущенное условие, которое имеет тривиальное решение  $v(t) = u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ .

Процесс решения задачи (9)–(10) в итерационном виде выглядит следующим образом:

$$v^{k+1}(t) = P_U \left( u^0(t) + \alpha \left( H_u \left( p(t, u^0, v^k), x(t, v^k), u^0(t), t \right) + s(t) \right) \right), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & H \left( p(t, u^0, v^k), x(t, v^k), v^k(t), t \right) - H \left( p(t, u^0, v^k), x(t, v^k), u^0(t), t \right) = \\ & = \left\langle H_u \left( p(t, u^0, v^k), x(t, v^k), u^0(t), t \right) + s(t), v^k(t) - u^0(t) \right\rangle, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $u^0 \in V$  – начальное приближение. При вычислении  $s(t)$  из (12) необходимо учитывать некоторые условия, например, которые описаны в [8]. В случае линейной по управлению задачи (1)–(3)  $s(t) = 0$ ,  $t \in T$ . [3, 6].

Соответственно итерационный процесс расчета дифференциально-алгебраической сопряженной системы (5)–(8) представляется в форме:

$$\dot{p}^{k+1}(t) = -H_x \left( p^{k+1}(t), x^0(t), u^0(t), t \right) - r(t), \quad (13)$$

$$p^{k+1}(t_1) = -\varphi_x \left( x^0(t_1) \right) - q, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & H \left( p^k(t), x^k(t), u^0(t), t \right) - H \left( p^k(t), x^0(t), u^0(t), t \right) = \\ & \left\langle H_x \left( p^k(t), x^0(t), u^0(t), t \right) + r(t), x^k(t) - x^0(t) \right\rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\varphi \left( x^k(t_1) \right) - \varphi \left( x^0(t_1) \right) = \left\langle \varphi_x \left( x^0(t_1) \right) + q, x^k(t_1) - x^0(t_1) \right\rangle. \quad (16)$$

где  $p^k(t) = p(t, u^0, v^k)$ ,  $x^k(t) = x(t, v^k)$ .

Вычисляя  $r(t)$  и  $q$  из уравнений (15)–(16), также необходимо учитывать некоторые условия. Одни из способов их расчета приведены в [7, 8]. Если в задаче (1) – (3)  $f(x, u, t)$ ,  $F(x, u, t)$  линейны по  $x$ , то из [4, 6] следует, что  $r(t) \equiv 0$ , а если  $\varphi(x)$  линейна, то  $q = 0$ .

## 2. Вычислительный эксперимент

Численные эксперименты по анализу вычислительной эффективности проекционного метода нелокального улучшения будем проводить на задаче о брахистохроне и задаче оптимального управления колебательными движениями маятника, которые известны в литературе в плане их численного решения тем или иным методом. В примерах вычисленные значения управляемых, фазовых и сопряженных переменных запоминались в узлах равномерной сетки с шагом дискретизации  $\Delta t = 10^{-3}$  на отрезке  $[t_0, t_1]$ , в промежутке между узлами проводилась интерполяция полиномами разных степеней, включая подпрограмму из библиотеки IMSL языка Fortran PowerStation 4.0 [1]. Численный расчет задачи проводился до первого улучшения, далее строилась новая задача и итерационный алгоритм повторялся. В качестве критерия остановки выбиралось условие  $|\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k)| \leq |\Phi(u^k)| \cdot \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  – заданная точность (в примерах  $\varepsilon = 10^{-4}$ ). Численное решение фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялось методом Рунге-Кутты-Вернера пятого или шестого порядка точности с помощью библиотеки IMSL языка Fortran PowerStation 4.0 [1]. По количеству решенных задач Коши отдельно для фазовой и сопряженной системы проводится сравнительный анализ методов решения.

### Пример 1. Задача о брахистохроне

Брахистохрона — кривая скорейшего спуска. В 1696 г. задача о ее нахождении была поставлена Иоганном Бернулли. Заключается она в следующем:

Среди плоских кривых, соединяющих две данные точки  $A$  и  $B$ , лежащих в одной вертикальной плоскости ( $B$  ниже  $A$ ), найти ту, двигаясь по которой под действием только силы тяжести, сонаправленной отрицательной полуоси  $OY$ , материальная точка достигнет  $B$  из  $A$  за кратчайшее время.

Мы рассмотрим некоторый конкретный случай:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u, \\ \dot{x}_2(t) = \sqrt{\frac{1+u^2}{x_1}}, \end{cases} \\ x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 0, \\ t \in [0, 2].$$

$$\Phi(u) = x_2(2) + 1000(x_1(2) - 10)^2 \rightarrow \min.$$

Функция Понtryгина:

$$H(p, x, u, t) = p_1 u + p_2 \sqrt{\frac{1+u^2}{x_1}}.$$

Градиенты:

$$H_{x_1} = -0.5 p_2 \sqrt{\frac{1+u^2}{x_1^3}}, \quad H_{x_2} = 0, \quad H_u = p_1 + \frac{u p_2}{\sqrt{(1+u^2)} x_1}.$$

Составим дифференциально-алгебраическую сопряженную систему ( $r_2(t) \equiv 0$ ), так как  $f(x, u, t)$ ,  $F(x, u, t)$  линейны по  $x_2$ :

$$\dot{p}_1 = 0.5 p_2 \sqrt{\frac{1+u^2}{x_1^3}} - r_1(t), \quad \dot{p}_2 = 0,$$

$$p_1(2) = -2000(x_1(2) - 10) - q_1, \quad p_2(5) = -1,$$

где  $r_1(t)$  определяется из уравнения:

$$r_1(t) = \frac{H(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t) - H(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t)}{x_1^k(t) - x_1^0(t)} - H_{x_1}(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t).$$

$q_i(t)$  определяются из уравнения:

$$q_i = \frac{\varphi(x^k(t_1)) - \varphi(x^0(t_1))}{x^k(t_1) - x^0(t_1)} - \varphi_{x_i}(x^0(t_1)), \quad i = 1, 2,$$

$$u^{k+1} = P_u \left( u^0 + \alpha \left( \int_0^2 H_u(p^k(t), x^k(t), u^0, t) dt + s \right) \right),$$

$$\int_T \Delta_u H(p^k(t), x^k(t), u, t) dt = \left\langle \int_T H_u(p^k(t), x^k(t), u^0, t) dt, u^k - u^0 \right\rangle + s(u^k - u^0).$$

В качестве начального приближения возьмем управление  $u^0(t) \equiv 0$ .

В таблице 1 приведены результаты, полученные А. Ю. Горновым (1–7 метод) и полученные рассматриваемым нами методом.

Таблица 1

Сравнительный анализ эффективности

Метод	$\Phi^*$	Число задач Коши
1	5.471632	100 005
2	5.271632	100 049
3	2.974932	100 036
4	2.974932	100 035
5	2.974932	100 014
6	5.271632	100 048
7	2.971671	1 612
ПМНУ( $\alpha = 10^{-4}$ )	2.974895	17
ПМНУ( $\alpha = 10^{-6}$ )	2.975505	2 267

Для  $\alpha > 10^{-4}$  ПМНУ не сходится. Для других значений начального управления получаем похожие результаты. Например, для  $u^0(t) \equiv 100$  и  $\alpha = 10^{-4}$  получаем значение функционала 2.974895, получившееся путем решения 21 задачи Коши.

**Пример 2. Оптимальное управление колебательными движениями маятника**

Рассматриваем нелинейную задачу [2, с. 140], [9], [10, с. 137–138, 243], [11, с. 113]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, \\ \dot{x}_2(t) = u - \sin x_1, \\ x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 0, \\ u(t) \in [-1, 1], \quad t \in [0, 5]. \end{cases}$$

$$\Phi(u) = x_1^2(5) + x_2^2(5) \rightarrow \min.$$

Функция Понtryгина:

$$H(p, x, u, t) = p_1 x_2 + p_2 (u - \sin x_1).$$

Градиенты:

$$H_{x_1} = -p_2 \cos x_1, \quad H_{x_2} = p_1, \quad H_u = p_2.$$

Составим дифференциально-алгебраическую сопряженную систему ( $r_2(t) \equiv 0$ , так как  $f(x, u, t)$ ,  $F(x, u, t)$  линейны по  $x_2$ ):

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_2 \cos x_1 - r_1(t), \quad \dot{p}_2 = -p_1, \\ p_1(5) &= -2x_1(5) - q_1, \quad p_2(5) = -2x_2(5) - q_2, \end{aligned}$$

где  $r_1(t)$  определяется из уравнения:

$$r_1(t) = \frac{H(p^k(t), x^k(t), u^0(t), t) - H(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t)}{x_1^k(t) - x_1^0(t)}.$$



$$-H_{x_i}(p^k(t), x^0(t), u^0(t), t).$$

$q_i(t)$  определяются из уравнения:

$$q_i = \frac{\varphi(x^k(t_1)) - \varphi(x^0(t_1))}{x^k(t_1) - x^0(t_1)} - \varphi_{x_i}(x^0(t_1)), \quad i = 1, 2,$$

$s(t) = 0$ , так как задача линейна по управлению. В качестве начального приближения возьмем управление  $u^0(t) \equiv 0$ .

В таблице 2 приведены результаты, полученные А. Ю. Горновым (1 – 11 метод), и полученные рассматриваемым нами методом.

**Таблица 2**

Сравнительный анализ эффективности

Метод	$\Phi^*$	Число задач Коши
1	11.904409	27 499
2	11.904409	80 466
3	11.904409	4 998
4	11.904589	100 048
5	11.907209	4 454
6	28.904409	100 146
7	11.904409	5 586
8	11.904410	100 076
9	11.904409	71 184
10	11.904409	28 919
11	11.904409	12 602
ПМНУ( $\alpha = 1$ )	11.909310	73
ПМНУ( $\alpha = 0.1$ )	11.909309	691
ПМНУ( $\alpha = 0.01$ )	11.909309	6 751

Для  $\alpha > 1$  ПМНУ не сходится.

### Заключение

В статье представлены результаты сравнительной эффективности модифицированного проекционного метода нелокального улучшения управлений, проведенные по тестовым задачам (задача о брахистохроне, оптимальное управление колебательными движениями маятника). Вычислительные эксперименты иллюстрируют эффективность рассматриваемого нами подхода. Это можно наблюдать по количеству решенных задач Коши, в разы отличающиеся от количества затрачиваемых другими методами.

В заключение можно отметить, что для решения дифференциально-алгебраических условий улучшения можно также применять вычислительно эффективные методы возмущений, описанные в работах [3, 5].

### Литература

1. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. – Москва: Диалог-МИФИ, 2001. – Ч. 3. – 368 с.
2. Батулин В. А., Урбанович Д. Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. – Новосибирск: Наука, 1997. – 175 с.
3. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. – 260 с.
4. Булдаев А. С., Моржин О. В. Модификация метода проекций для улучшения нелинейных управлений // Вестник Бурятского государственного университета. – 2010. – Вып. 9. – С. 10–17.
5. Булдаев А. С. Проекционные методы возмущений в задачах оптимизации управляемых систем // Известия Иркутского государственного университета. – Сер. Математика. – 2014. – Т. 8. – С. 29–43.
6. Булдаев А. С., Моржин О. В. Улучшения управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Известия Иркутского государственного университета. – Сер. Математика. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 94–106.
7. Булдаев А. С., Анхбаяр Г. Условия улучшения и оптимальности в задачах оптимизации нелинейных управляемых систем // Вестник Бурятского государственного университета. – 2014. – Вып. 9(2). – С. 3–9.
8. Бурлаков И. Д. Анализ эффективности метода нелокального улучшения в задачах оптимального управления // Вестник Бурятского государственного университета. – 2014. – Вып. 9(2). – С. 10–19.
9. Васильев О. В., Тятюшкин А. И. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1981. – №6. – С. 1376–1384.
10. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. – Новосибирск: Наука, 2009. – 279 с.
11. Тятюшкин А. И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. – Новосибирск: Наука, 1992. – 193 с.

*Бурлаков Иван Дмитриевич*, аспирант кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел. 8(3012)217–733.

*Burlakov Ivan Dmitrievich*, postgraduate student, Buryat State University, applied mathematics department.

### 3. Функциональный анализ и дифференциальные уравнения

УДК 517.948

© Г. А. Шишкин

#### КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ОДНОГО ВИДА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В статье, используя новую модификацию функции гибкой структуры, исследуем возможность решения краевых задач одного вида интегродифференциальных уравнений Вольтерра с запаздывающим аргументом нейтрального типа.

**Ключевые слова:** краевая задача, интегродифференциальные уравнения, функция гибкой структуры, нейтральный тип уравнений.

© G. A. Shishkin

#### BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ONE KIND FOR VOLTERRA INTEGRAL AND DIFFERENTIAL EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE

In the article a possibility of solution the boundary value problems of one kind for Volterra integral and differential equations with late argument of neutral type is studied with the use a new updating function of flexible structure.

**Keywords:** boundary value problem, integral and differential equations, function of flexible structure, neutral type of equations.

#### Введение

В работе [2] проведено исследование возможностей преобразования начальных задач интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра к разрешающему интегральному уравнению с обыкновенным аргументом. С помощью функции гибкой структуры доказано, что задача Коши для рассмотренных типов уравнений преобразуется к интегральному уравнению типа Вольтерра с обыкновенным аргументом, решение которого существует и притом единственное при выполнении условий ограниченности функций, входящих в уравнение. Рассмотрены возможности решения в замкнутом виде и вариант приближенного решения, если точное решение найти затруднительно.

**Постановка краевой задачи и ее решение**

Рассмотрим уравнение нейтрального типа следующего вида

$$y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^l \left[ \sum_{i=0}^{n-1} f_{ij}(x) y^{(i)}(u_j(x)) + \lambda \int_a^x \sum_{i=0}^n K_{ij}(x, \eta) y^{(i)}(u_j(\eta)) d\eta \right] = f(x), \quad (1)$$

где  $u_0(x) \equiv x$ ,  $u_j(x) \leq x$ ,  $u_j(x) \neq x \forall j = \overline{1, l}$ ,  $f_{ij}(x)$ ,  $f(x)$  и  $u_j(x)$  – непрерывны, ядра  $K_{ij}(x, \eta)$  – регулярны в квадрате  $a \leq x, \eta \leq b$ .

Пусть дано уравнение (1), начальные функции

$$y^{(i)}(u_j(x)) = y^{(i)}(x_0) \varphi^{(i)}(u_j(x)), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad x \in E_{x_0}, \quad (2)$$

где  $E_{x_0} = \bigcup_{j=0}^l E_{x_0}^j$ ,  $E_{x_0}^j$  – начальное множество и линейные билोकальные краевые условия

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{i\tau} y^{(i)}(x_0) + \beta_{i\tau} y^{(i)}(x_1)] = \gamma_\tau, \quad \tau = \overline{0, n-1}, \quad a \leq x_0 < x_1 \leq b. \quad (3)$$

Предполагая, что решение задачи (1), (2), (3) существует и единственно, будем искать ее решение на отрезке  $x \in [x_0, b]$  с помощью новой модификации функции гибкой структуры, полученной для решения краевых задач в работе [3] (случаи 2 и 3)

$$y(x) = D^{-1} \left\{ \sum_{s=1}^n \frac{d^s \Delta_s(x-x_0)}{dx^s} \sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\omega_{s\tau}}{\omega} [\gamma_\tau - D^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{k\tau} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^k \Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k} \mu(t) dt] + \int_{x_0}^{u_j(x)} \frac{\partial^i \Delta_n(u_j(x)-t)}{\partial x^i} \mu(t) dt \right\}. \quad (4)$$

Обозначим через  $c_j$  наименьшие из корней  $u_j(x) = x_0$  на отрезке  $x \in [x_0, b]$ , если же таковых нет, то полагаем соответствующие  $c_j = b$ . Далее разобьем интегралы в уравнении (1) на суммы от известных и неизвестных частей в выражениях от запаздываний в соответствии с начальными функциями (2).

Подставив выражения функции гибкой структуры (4) и ее производных  $y^{(n)}(x)$  и  $y^{(i)}(u_j(x))$  в исходное уравнение (1) и проделав необходимые преобразования, получим разрешающее интегральное уравнение Вольтерра-Фредгольма с обыкновенным аргументом

$$\mu(x) + \sum_{j=0}^l \left[ \int_{x_0}^{x_1} G_j(x, t) \mu(t) dt + \lambda \int_{x_0}^{u_j(x)} H_j(x, t) \mu(t) dt \right] = F(x). \quad (5)$$

**Пример.** Найти решение краевой задачи уравнения нейтрального типа:

$$y'(x) + 2 \int_0^x (x-\eta) y'(\frac{\eta}{2}) d\eta = 1 + \frac{x^2}{2}, \quad y(x) = y(0) \frac{x}{2}, \quad y(\frac{x}{2}) = y(0) \frac{x}{4}, \quad 3y(0) + y(1) = 1.$$

**Решение.** В данной краевой задаче  $x_0 = 0, x_1 = 1, u_0(x) \equiv x,$

$u_1(x) = \frac{x}{2}, c_0 = 0, c_1 = 0, E_{x_0} = [0].$  Далее можно воспользоваться формулой (4), выведенной для общего случая, но проще повторить на примере ее вывод. Выпишем функцию гибкой структуры для начальных задач, формулу (4) работы [3] и ее значение для  $y(x_1)$

$$y(x) = y(0)e^{rx} + \int_0^x e^{r(x-t)} \mu(t) dt, \quad y(1) = y(0)e^r + \int_0^1 e^{r(1-t)} \mu(t) dt.$$

Подставив полученное выражение для  $y(x_1)$  при  $x_1 = 1$  в краевые условия задачи, найдем:

$$y(0) = \frac{1}{3 + e^r} - \frac{1}{3 + e^r} \int_0^1 e^{r(1-t)} \mu(t) dt.$$

Затем, подставив это выражение для  $y(0)$  в функцию гибкой структуры и с целью сокращения объема выкладок положив  $r = 0$  для функции гибкой структуры и ее производных, получим выражения в соответствии с условиями краевой задачи:

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 \mu(t) dt + \int_0^x \mu(t) dt \quad \text{и} \quad y(\frac{x}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 \mu(t) dt + \int_0^{\frac{x}{2}} \mu(t) dt,$$

$$y'(x) = \mu(x), \quad y'(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} \mu(\frac{x}{2}).$$

Подставив полученные выражения функции гибкой структуры и ее производных для данной краевой задачи в исходное уравнение, получим разрешающее интегральное уравнение  $\mu(x) + \int_0^x (x-t) \mu(\frac{t}{2}) dt = 1 + \frac{x^2}{2},$  решение которого  $\mu(x) \equiv 1.$

Используя это решение, найдем решение краевой задачи  $y(x) = x.$  Нелегко проверить, что условия краевой задачи выполняются.

### Заключение

В журнальной литературе имеются труды, которые затрагивают многие вопросы решения интегродифференциальных уравнений Вольтерра с отклоняющимся аргументом, но мало работ, которые бы поднимали и

решали проблему преобразования начальных и краевых задач для таких уравнений к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом.

В статье исследованы возможности построения модели с обыкновенным аргументом для краевой задачи одного вида интегродифференциальных уравнений Вольтерра нейтрального типа. Для всех уравнений запаздывающего типа с помощью функции гибкой структуры этот вопрос решен положительно. Для уравнений нейтрального и опережающего типов такое преобразование возможно только для некоторых классов уравнений. Полученные аналитические выражения модели начальной задачи дают возможность оптимизировать нахождение ее точного или приближенного решений за счет оптимального выбора параметров функции гибкой структуры и разработать программу решения поставленных задач на ЭВМ. Этому и будут посвящены дальнейшие исследования и разработки программ.

#### Литература

1. Куликов Н. К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой // Тематический сб. МТИПП. – М., 1974. – С. 47–57.
2. Шишкин Г. А. Линейные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра с функциональным запаздыванием. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2009. – 64 с.
3. Шишкин Г. А. Функция гибкой структуры и ее модификация при решении краевых задач для уравнений с функциональным запаздыванием // Вестник Бурятского государственного университета. – 2013. – Вып. 9. – С. 144–147.

*Шишкин Геннадий Александрович*, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел. 8(3012)217–733.

*Shishkin Gennady Aleksandrovich*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, applied mathematics department, Buryat State University.

Научное издание

В Е С Т Н И К  
БУРЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2/2014

**Математика, информатика**

Редактор Д. Н. Гармаева  
Компьютерная верстка Д. О. Трунина

Свидетельство о государственной аккредитации  
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 25.12.14. Формат 70 x 100 1/16.  
Усл. печ. л. 5,85. Уч.-изд. л. 3,78. Тираж 1000. Заказ 325.  
Цена свободная. Дата выхода в свет 29.12.14

Издательство Бурятского госуниверситета  
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
E-mail: [riobsu@gmail.com](mailto:riobsu@gmail.com)

Отпечатано в типографии Бурятского госуниверситета  
670000, г. Улан-Удэ, ул. Сухэ-Батора, 3а