ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93, 517.937
DOI: 10.18101/2304-5728-2018-3-3-13

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА РЕЛЕЯ–РИТЦА

© Лакеев Анатолий Валентинович
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории
управления им. В. М. Матросова
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: lakeyev@icc.ru

© Линке Юрий Эрниевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Иркутский национальный исследовательский технический университет
Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83
E-mail: linkeyurij@gmail.com

© Русанов Вячеслав Анатольевич
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории
управления им. В. М. Матросова
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: v.rusanov@mail.ru

В работе рассматривается оператор Релея–Ритца, определенный на множестве пар измеримых функций и равный отношению их модулей, если знаменатель отличен от нуля, и ноль — в противном случае. Исследуется вопрос непрерывности этого оператора относительно сходимости по мере. Показано, что для сходимости значения оператора на последовательности пар к значению на предельной паре функций необходима не только сходимость по мере его аргументов, но и сходимость по мере носителей второго аргумента к носителю его предела.
Ключевые слова: мера; σ -алгебра; сходимость по мере; топология; оператор Релея–Ритца; носитель функции; метрика; характеристическая функция.

Введение

Каждая область современной математики, как правило, содержит свои ведущие проблемы, которые настолько трудны, что их полное решение даже и не ожидается, но которые стимулируют постоянный поток работ и служат главными вехами на пути прогресса в этой области. В качественной теории дифференциальной реализации такой проблемой является проблема классификации непрерывных систем [1], рассматриваемых так, как если бы они точно совпадали с решениями идеализированных дифференциальных моделей. Одним из эффективных методов решения этой задачи заключается в построении оператора Релея–Ритца [2–4], поведение которого на множестве пар «траектория, управление» характеризует наличие означенной модели. В данном контексте особую роль приобретает свойство непрерывности (см. замечание 3 [3], а также теорему 3 [4]) проективизации оператора Релея–Ритца, основанное на критериях сходимости по мере [5, 6], чему и посвящена данная работа.

1. Постановка задачи

Будем придерживаться терминологии и обозначений из [5, 6]. Пусть (X,Σ,μ) — измеримое пространство, т.е. X — произвольное множество, Σ — σ-алгебра на X с единицей X и μ — σ-аддитивная мера на Σ. Кроме того, всюду в дальнейшем будем считать, что мера μ полна и, для простоты, конечна, т.е. $\mu(X)<\infty$ (хотя все полученные результаты легко переносятся и на случай σ-конечной меры). Обозначим через $S=S(X,\Sigma,\mu)$ — множество всех вещественных измеримых (более точно, μ-измеримых) функций, заданных на X и почти всюду конечных. При этом, как обычно, функции, совпадающие почти всюду, отождествляются.

Определим оператор $\Psi: S\times S\to S$, который будем называть оператором Релея–Ритца, следующим образом:

$$\Psi(f,g)(x)=\begin{cases}\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}, & \textit{если} \;\; g(x)\neq 0,\\ 0, & \textit{если} \;\; g(x)=0,\end{cases} \tag{1}$$

для всех $f,g\in S$, $x\in X$.

На пространстве S будем рассматривать топологию, порождаемую сходимостью по мере. Хорошо известно [5, с. 64, теорема 14], что (при $\mu(X)<\infty$) эта топология порождается следующей метрикой на S:

$$\rho(f,g)=\int_X \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}dx, \tag{2}$$

при $f,g\in S$.

Основная задача, которая исследуется в данной работе, состоит в следующем.

Пусть заданы две последовательности $f_1,\dots,f_n,\dots$, $g_1,\dots,g_n,\dots$ и функции f, g из S такие, что $\rho(f_n,f)\to 0$, $\rho(g_n,g)\to 0$ при $n\to\infty$.

Верно ли, что $\rho(\Psi(f_n,g_n),\Psi(f,g))\to 0$, при $n\to\infty$ и если нет, то при каких условиях это верно?

2. Основные теоремы

Сначала рассмотрим более простой оператор $\psi : S \to S,$ определяемый следующим образом:

$$\psi(g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|g(x)|}, & \text{если } \; g(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \; g(x) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

для всех $g \in S$, $x \in X$.

В [6] показано (с. 54, следствие 12.1), что если функции g, g_n при $n = 1,2,\ldots$ не обращаются в нуль на X и $\rho(g_n, g) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\rho(\psi(g_n), \psi(g)) \to 0$ при $n \to \infty$.

В дальнейшем, для любой функции $g \in S$, будем обозначать

$$\operatorname{supp} g = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$$

ее носитель (определяемый с точностью до множества меры нуль).

Таким образом получаем, что для оператора ψ основная задача данной работы решается положительно, но при дополнительном условии:

$$\operatorname{supp} g = X, \quad \operatorname{supp} g_n = X, \text{ при } n = 1,2,\ldots .$$

Оказалось, что в общем случае это не верно, как будет видно из приводимой ниже теоремы.

Для того, чтобы сформулировать эту теорему, введем на Σ следующую метрику ([5], с. 66):

$$\rho_\mu(A,B) = \rho(\chi_A, \chi_B);$$

$A, B \in \Sigma$, где χ_A и χ_B — характеристические функции множеств A и B, соответственно (при этом множества такие, что $A = B (\operatorname{mod} \mu)$ отождествляются). Используя формулу (2), нетрудно показать, что $\rho_\mu(A,B) = \dfrac{1}{2}\mu(A \Delta B)$, где $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ — симметричная разность множеств A и B.

Кроме того, при доказательстве теоремы будем пользоваться, наряду с определением сходимости по мере как сходимости по метрике ρ, также и стандартным определением ([5], с. 57), т.е. последовательность $g_n \in S$ ($n \in N$) сходится по мере к $g \in S$ на X (обозначение — $g_n \to g(\mu)$ при $n \to \infty$), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x \in X \mid |g_n(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \to 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Теорема 1. Пусть $g, g_n \in S$, $n = 1,2,\ldots$ такие, что $\rho(g_n, g) \to 0$ при $n \to \infty$. Для того, чтобы $\rho(\psi(g_n), \psi(g)) \to 0$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho_\mu(\operatorname{supp} g_n, \operatorname{supp} g) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $g_n \to g(\mu)$. Так как для оператора ψ определяемого формулой (2), $\psi(g) = \psi(|g|)$, то без ограничения общности можно считать, что функции $g, g_n \in S$ неотрицательные. Обозначим $\lambda_n(x) = \dfrac{|g_n(x) - g(x)|}{1 + |g_n(x) - g(x)|}$. Тогда по условию теоремы

$$\rho(g_n, g) = \int_X \lambda_n(x)dx \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Положим

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\left|\dfrac{1}{g_n(x)} - \dfrac{1}{g(x)}\right|}{1 + \left|\dfrac{1}{g_n(x)} - \dfrac{1}{g(x)}\right|}, & \text{если } x \in A_n = \operatorname{supp} g_n \bigcap \operatorname{supp} g, \\ \dfrac{\left|\dfrac{1}{g_n(x)}\right|}{1 + \left|\dfrac{1}{g_n(x)}\right|}, & \text{если } x \in B_n = \operatorname{supp} g_n \setminus \operatorname{supp} g, \\ \dfrac{\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|}{1 + \left|\dfrac{1}{g(x)}\right|}, & \text{если } x \in C_n = \operatorname{supp} g \setminus \operatorname{supp} g_n, \\ 0, & \text{если } x \in D_n = \overline{\operatorname{supp} g_n} \bigcap \overline{\operatorname{supp} g}. \end{cases}$$

Тогда $\rho(\psi(g_n), \psi(g)) = \int_X \varphi_n(x)dx$ и нужно показать, что $\rho(\psi(g_n), \psi(g)) \to 0$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\rho_\mu(\operatorname{supp} g_n, \operatorname{supp} g) = \dfrac{1}{2}\mu(\operatorname{supp} g_n \Delta \operatorname{supp} g) \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как множества A_n, B_n, C_n и D_n образуют разбиение множества X, а функции φ_n неотрицательные, то для этого необходимо и достаточно, чтобы все интегралы $\int_{A_n} \varphi_n(x)dx$, $\int_{B_n} \varphi_n(x)dx$ и $\int_{C_n} \varphi_n(x)dx$ сходились к нулю при $n \to \infty$.

Покажем, что $\int\limits_{A_n} \varphi_n(x)dx$ сходится к нулю при $n \to \infty$, немного модифицируя доказательство теоремы 12.3 и следствия 12.1 из [6, с. 52–53].

Обозначим $K_n = \left[\frac{1}{n}, n\right] \subseteq R^1$. Так как $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = (0, \infty)$, то для $E_n = g^{-1}(K_n)$ получаем $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = U = \operatorname{supp} g$.

По теореме о непрерывности меры, для любого $\gamma > 0$, можно подобрать r так, чтобы для $M = U \setminus E_r$ выполнялось неравенство $\mu(M) < \frac{\gamma}{2}$.

Обозначим $K' = \left[\frac{1}{2r}, r + \frac{1}{r}\right]$. Тогда в силу равномерной непрерывности функции $\frac{1}{t}$ на K' для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in K'$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right| < \varepsilon$ (можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{4r^2}$).

Рассмотрим множества

$$G_n = \{x \in X \mid |g_n(x) - g(x)| \geq \min\{\frac{1}{2r}, \delta\}\}.$$

Так как $g_n \to g(\mu)$, то найдется n_0 такое, что $\mu(G_n) < \frac{\gamma}{2}$ для всех $n \geq n_0$ и, следовательно, $\mu(M \bigcup G_n) \leq \mu(M) + \mu(G_n) < \gamma$ и тем более $\mu(A_n \bigcap (M \bigcup G_n)) < \gamma$.

Далее заметим, что если $x \in A_n \setminus (M \bigcup G_n)$, то:

а) $x \in E_r$, поэтому $g(x) \in K_r \subseteq K'$;

б) так как $x \notin G_n$, то $|g_n(x) - g(x)| < \min\{\frac{1}{2r}, \delta\} \leq \frac{1}{2r}$, поэтому $\frac{1}{2r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} \leq g(x) - \frac{1}{2r} < g_n(x) < g(x) + \frac{1}{2r} \leq r + \frac{1}{2r}$, следовательно $g_n(x) \in K'$;

в) опять, так как $|g_n(x)-g(x)|<\min\{\frac{1}{2r},\delta\}\le\delta$ и $g_n(x),g(x)\in K'$, то $\left|\frac{1}{g_n(x)}-\frac{1}{g(x)}\right|<\varepsilon$.

Но тогда, для $x\in A_n\setminus(M\bigcup G_n)$, получаем

$$\varphi_n(x)=\frac{\left|\frac{1}{g_n(x)}-\frac{1}{g(x)}\right|}{1+\left|\frac{1}{g_n(x)}-\frac{1}{g(x)}\right|}\le\left|\frac{1}{g_n(x)}-\frac{1}{g(x)}\right|<\varepsilon.$$

Окончательно получаем

$$\int_{A_n}\varphi_n(x)dx=\int_{A_n\bigcap(M\bigcup G_n)}\varphi_n(x)dx+\int_{A_n\setminus(M\bigcup G_n)}\varphi_n(x)dx\le\mu(A_n\bigcap(M\bigcup G_n))+$$
$$+\varepsilon\mu(A_n\setminus(M\bigcup G_n))\le\gamma+\varepsilon\mu(X)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Далее заметим, что

$$B_n\bigcup C_n=(\operatorname{supp}g_n(x)\setminus\operatorname{supp}g(x))\bigcup(\operatorname{supp}g(x)\setminus\operatorname{supp}g_n(x))=$$
$$=\operatorname{supp}g_n(x)\Delta\operatorname{supp}g(x).$$

Поэтому, если выполняется условие (4), то

$$\int_{B_n}\varphi_n(x)dx+\int_{C_n}\varphi_n(x)dx\le\mu(B_n)+\mu(C_n)=2\rho_\mu(\operatorname{supp}g_n,\operatorname{supp}g)\to 0$$ при $n\to\infty$, то есть условие (4) достаточно для сходимости $\rho(\psi(g_n),\psi(g))$ к нулю.

Покажем необходимость условия (4). Пусть $\rho(\psi(g_n),\psi(g))\to 0$ при $n\to\infty$.

Для интегралов $\int_{B_n}\varphi_n(x)dx$ и $\int_{C_n}\varphi_n(x)dx$ заметим, что верны следующие равенства:

1) если $x\in B_n$, то

$$\varphi_n(x)+\lambda_n(x)=\frac{\left|\frac{1}{g_n(x)}\right|}{1+\left|\frac{1}{g_n(x)}\right|}+\frac{|g_n(x)|}{1+|g_n(x)|}=\frac{1}{1+|g_n(x)|}+\frac{|g_n(x)|}{1+|g_n(x)|}=1;$$

2) если $x\in C_n$, то

$$\varphi_n(x)+\lambda_n(x)=\frac{\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|}{1+\left|\dfrac{1}{g(x)}\right|}+\frac{|g(x)|}{1+|g(x)|}=\frac{1}{1+|g(x)|}+\frac{|g(x)|}{1+|g(x)|}=1.$$

Поэтому $\mu(B_n)=\int\limits_{B_n}\varphi_n(x)dx+\int\limits_{B_n}\lambda_n(x)dx$ и $\mu(C_n)=\int\limits_{C_n}\varphi_n(x)dx+\int\limits_{C_n}\lambda_n(x)dx$.

А так как $\int\limits_{B_n}\lambda_n(x)dx\le\rho(g_n,g)\to 0$ и $\int\limits_{C_n}\lambda_n(x)dx\le\rho(g_n,g)\to 0$ при $n\to\infty$, если $\rho(g_n,g)\to 0$, то из сходимости к нулю интегралов $\int\limits_{B_n}\varphi_n(x)dx$ и $\int\limits_{C_n}\varphi_n(x)dx$ следует, что $\mu(B_n)\to 0$ и $\mu(C_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Но тогда и $\rho_\mu(\operatorname{supp} g_n,\operatorname{supp} g)=\frac{1}{2}\mu(B_n\Delta C_n)\to 0$ при $n\to\infty$. *Теорема доказана.*

Следствие 1. Если $\mu(X\setminus\operatorname{supp} g)>0$, то существует последовательность $g_n\to g(\mu)$ такая, что $\psi(g_n)$ не сходится к $\psi(g)$ по мере μ.

Доказательство. Достаточно взять

$$g_n(x)=\begin{cases} g(x), \text{если}\, g(x)\ne 0,\\ \dfrac{1}{n}, \quad \text{если } g(x)=0.\end{cases}$$

Тогда $\operatorname{supp} g_n=X$ и

$$\rho_\mu(\operatorname{supp} g_n,\operatorname{supp} g)=\frac{1}{2}\mu(X\setminus\operatorname{supp} g)=\text{const}>0.$$

Поэтому условие (4) не выполняется и, следовательно, $\psi(g_n)$ не сходится к $\psi(g)$ по мере μ.

Но при этом $\mu(\{x\in X\,|\,|g_n(x)-g(x)|>\varepsilon\})=0$ при $n>\frac{1}{\varepsilon}$ и, следовательно, $g_n\to g(\mu)$ при $n\to\infty$. *Следствие доказано.*

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что оператор $\psi:S\to S$ будет непрерывен относительно метрики

$$\rho_0(f,g)=\rho(f,g)+\rho_\mu(\operatorname{supp} f,\operatorname{supp} g).$$

Рассмотрим теперь оператор Релея–Ритца $\Psi:S\times S\to S$, определяемый формулой (1). Для него верно следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $f, f_n, g, g_n \in S$, $n = 1,2,\ldots$ такие, что $\rho(f_n, f) \to 0$ и $\rho(g_n, g) \to 0$ при $n \to \infty$. Если, кроме того, выполняется условие (4), т.е

$$\rho_\mu(\operatorname{supp} g_n, \operatorname{supp} g) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то $\rho(\Psi(f_n, g_n), \Psi(f, g)) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $f_n \to f(\mu)$ и $g_n \to g(\mu)$. Так же, как и для оператора ψ, то без ограничения общности можно считать, функции $f, f_n, g, g_n \in S$ неотрицательные.

Положим

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\left|\dfrac{f_n(x)}{g_n(x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}\right|}{1 + \left|\dfrac{f_n(x)}{g_n(x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}\right|}, & \text{если } x \in A_n = \operatorname{supp} g_n \bigcap \operatorname{supp} g, \\ \dfrac{\left|\dfrac{f_n(x)}{g_n(x)}\right|}{1 + \left|\dfrac{f_n(x)}{g_n(x)}\right|}, & \text{если } x \in B_n = \operatorname{supp} g_n \setminus \operatorname{supp} g, \\ \dfrac{\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|}{1 + \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|}, & \text{если } x \in C_n = \operatorname{supp} g \setminus \operatorname{supp} g_n, \\ 0, & \text{если } x \in D_n = \overline{\operatorname{supp} g_n} \bigcap \overline{\operatorname{supp} g}. \end{cases}$$

Тогда $\rho(\Psi(f_n, g_n), \Psi(f, g)) = \int\limits_X \varphi_n(x)dx$ и нужно показать, что $\rho(\Psi(f_n, g_n), \Psi(f, g)) \to 0$ при $n \to \infty$, если $\rho_\mu(\operatorname{supp} g_n, \operatorname{supp} g) \to 0$.

То, что $\int\limits_{A_n} \varphi_n(x)dx \to 0$ доказывается так же, как и в теореме 1, с небольшими модификациями.

И так же, как в тереме 1, из условия (4) получаем, что

$$\int\limits_{B_n} \varphi_n(x)dx + \int\limits_{C_n} \varphi_n(x)dx \le \mu(B_n) + \mu(C_n) = 2\rho_\mu(\operatorname{supp} g_n, \operatorname{supp} g) \to 0$$

при $n \to \infty$. *Теорема доказана.*

Замечание 2. Очевидно, что условие (4) в общем случае уже не будет необходимым. Однако можно доказать его необходимость например если

$$| f_n(x) | \geq \mathrm{consn} > 0 \text{ для всех } x \in \operatorname{supp} g .$$

Замечание 3. Из теоремы 2 следует, что оператор $\Psi : S \times S \to S$ будет непрерывен относительно метрики на $S \times S$, определяемой равенством

$$\rho_0((f, g),(f_1, g_1)) = \rho(f, f_1) + \rho(g, g_1) + \rho_\mu(\operatorname{supp} g, \operatorname{supp} g_1) .$$

Заключение

В работе для оператора Релея–Ритца определенного на множестве пар измеримых функций и равного отношению их модулей, если знаменатель отличен от нуля, и ноль — в противном случае, исследуется вопрос непрерывности этого оператора относительно сходимости по мере. Показано, что для сходимости значения оператора на последовательности пар к значению на предельной паре функций необходима не только сходимость по мере его аргументов, но и сходимость по мере носителей второго аргумента к носителю его предела.

Литература

1. Willems J. C. System Theoretic Models for the Analysis of Physical Systems // Ric. Aut. 1979. No. 10. P. 71–106.

2. Данеев А. В., Русанов В. А., Шарпинский Д. Ю. Нестационарная реализация Калмана–Месаровича в конструкциях оператора Релея–Ритца // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 1. С. 82–90.

3. Лакеев А. В., Линке Ю. Э., Русанов В. А. К реализации полилинейного регулятора дифференциальной системы второго порядка в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 8. С. 1098–1109. DOI: 10.1134/S037406411708012X.

4. Русанов В. А., Данеев А. В., Линке Ю. Э. К геометрическим основам дифференциальной реализации динамических процессов в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. 2017. Т. 53, № 4. С. 71–83.

5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

6. Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998. 160 с.

ON A CRITERION FOR THE CONTINUITY OF THE RAYLEIGH–RITZ OPERATOR

Anatoly V. Lakeev
Dr. Sci. (Phys. and Math.),
Leading Researcher,
Institute of Systems Dynamics and Theory of
Management named after V. M. Matrosov (ISDTM SB RAS)
134 Lermontova St., Irkutsk, 664033, Russia
E-mail: lakeyev@icc.ru

Yury E. Linke
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Irkutsk State National Research Technical University
83 Lermontova St., Irkutsk, 664033, Russia
E-mail: linkeyurij@gmail.com

Vyacheslav A. Rusanov
Dr. Sci. (Phys. and Math.),
Senior Researcher,
Institute of Systems Dynamics and Theory of
Management named after V. Matrosov (ISDTM SB RAS)
134 Lermontova St., Irkutsk, 664033, Russia
E-mail: v.rusanov@mail.ru

The work considers the Rayleigh–Ritz operator identified on the set of pairs of measurable functions that equals to the ratio of their modules if a denominator is different from zero, and zero otherwise. The issue of the continuity of this operator regarding the convergence in measure is studied. It is shown that for the convergence of the value of operator on a sequence of pairs to the value on the limit pair of functions, it is necessary not only the convergence in measure of its arguments, but also the convergence in measure of the second argument to the carrier of its limit.
Keywords: measure; σ -algebra; convergence in measure; topology; the Rayleigh–Ritz operator; carrier of function; metric; characteristic function.

References

1.Willems J. C. System Theoretic Models for the Analysis of Physical Systems. *Ric. Aut.* 1979. No. 10. Pp. 71−106.

2. Daneev A. V., Rusanov V. A., Sharpinskii D. Yu. Nestacionarnaja realizacija Kalmana-Mesarovicha v konstrukcijah operatora Releja-Ritca [The Nonstationary Realization of Kalman-Mesarovic in the Constructions of the Rayleigh-Ritz Operator] *Kibernetika i sistemnyi analiz - Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. No. 1. Pp. 82–90.

3. Lakeev A. V., Linke Yu. E, Rusanov V. A. K realizacii polilinejnogo reguljatora differencial'noj sistemy vtorogo porjadka v gil'bertovom prostranstve [To Realization of a Polylinear Controller as a Second-Order Differential System in a Hilbert Space]. *Differentsial'nye uravneniya - Differential Equations.* 2017. V. 53, No. 8. Pp. 1070–1081. DOI: 10.1134/S0012266117080122.

4. Rusanov V. A., Daneev A. V., Linke Yu. É. K geometricheskim osnovam differentsial'noi realizatsii dinamicheskikh protsessov v gil'bertovom prostranstve [To the Geometric Foundations of the Differential Realization of Dynamical Processes in a Hilbert Space]. *Kibernetika i sistemnyi analiz - Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. V. 53, No. 4. Pp. 554–564. DOI: 10.1007/s10559-017-9957-z.

5. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funkcionalnyj Analiz* [Functional Analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1984. 752 p.

6. Dyachenko M. I., Ulyanov P. L. *Mera i integral* [Measure and Integral]. Moscow: Faktorial Publ., 1998. 160 p.