ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 519.62
DOI: 10.18101/2304-5728-2022-4-3-11

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ 4-ГО ПОРЯДКА

© Абидуев Пурбо Ламажапович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятская государственная сельскохозяйственная академия
имени В. Р. Филиппова
Россия, 670024, г. Улан-Удэ, ул. Пушкина, 8
apl087@yandex.ru

© Дармаев Тумэн Гомбоцыренович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
dtumen@mail.ru

© Лисейкин Владимир Дмитриевич
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник,
Федеральный исследовательский центр
информационных и вычислительных технологий
Россия, 630090, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 6
liseikin.v@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение 4-го порядка с малым параметром при старшей производной. Предлагается алгоритм решения, основанный на применении специальной неравномерной разностной сетки, при этом оператор дифференциального уравнения аппроксимируется двумя способами: 1) оператор 4-го порядка заменяется на более удобный оператор, который расщепляется на два оператора, т.е. вместо одного уравнения рассматривается система двух уравнений второго порядка; 2) методом интегральных тождеств оператор аппроксимируется на пятиточечном шаблоне. При первом подходе доказаны теоремы о равномерной сходимости на предложенной в работе неравномерной разностной сетке. При втором подходе порядок равномерной сходимости находился численным экспериментом. Решение системы разностных уравнений проводилось немонотонной прогонкой. Описанный численный алгоритм был применен для решения линеаризованной задачи о продольно-поперечном изгибе упругой балки с заделанными концами под действием распределенной нагрузки.

Ключевые слова: численное решение, сингулярно возмущенная краевая задача 4-го порядка, равномерная сходимость, метод интегральных тождеств, неравномерная разностная сетка.

Для цитирования

Абидуев П. Л., Дармаев Т. Г., Лисейкин В. Д. Численное решение сингулярно возмущенных краевых задач 4-го порядка // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2022. № 4. С. 3–11.

Введение

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение 4-го порядка с малым параметром при старшей производной:

$$Lu(x) = \varepsilon\left[a(x)u''(x)\right]'' - \left[b(x)u'(x)\right]' + c(x)u(x) = f(x), 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

где $a(x) > 0, b(x) > 0, c(x) \ge 0$, с граничными условиями двух типов:

$$u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0\,, \tag{2}$$

$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0\,. \tag{3}$$

Задачи (1)–(2) и (1)–(3) встречаются в теории оболочек и упругости. ([1]–[3]). В работе [4] предложен алгоритм численного решения (1) на равномерной сетке, где для задачи (1)–(2) погрешность оценивается величиной $h^{3/2} / \varepsilon^2$. При $\varepsilon \le h^{3/4}$ этот алгоритм уже не гарантирует сходимость численного решения к точному. Поэтому при малых ε задачу нужно решать другим методом. Можно воспользоваться асимптотическим разложением [5], но при этом придется численно решать возникающие при разложении уравнения.

В данной работе предлагается алгоритм решения, основанный на применении специальной неравномерной разностной сетки, при этом оператор L аппроксимируется двумя способами:

1) L заменяется на более удобный оператор, который расщепляется на два оператора, т.е. вместо одного уравнения (1) рассматривается система двух уравнений второго порядка. Этот способ легко реализуется для случая гладких коэффициентов $a(x), b(x), c(x)$ ([6]).

2) Методом интегральных тождеств L аппроксимируется на пятиточечном шаблоне. В этом случае коэффициенты могут быть разрывными [7].

1 Метод расщепления

Рассмотрим первый подход. Для задачи (1)–(2) имеем:

$$Lu(x) = L_1 L_2 u - \varepsilon a_1(x)u''(x) + b_1(x)u'(x) = f(x), 0 \le x \le 1, \tag{1.1}$$

где

$$L_1 u \equiv \varepsilon a(x)u''(x) + \varepsilon b_2(x)u' - b(x)u, \tag{1.2}$$

$$L_2 v \equiv v'' - b_2(x)v' - (c_2(x) - b_2'(x))v, \tag{1.3}$$

$$a_1(x) = (a(x)b_2(x))' - a(x)(c_2(x) + b_2^2(x)),$$

$$b_1(x) = (a(x)b_2(x))'' - a(x)(c_2(x) + b_2(x))b_2(x),$$

$$b_2(x) = b'(x) / b(x), \quad c_2(x) = c(x) / b(x).$$

Пусть $\bar{u}(x)$ — решение следующей задачи:

$$L_2 L_1 \bar{u} = f(x), \bar{u}(0) = \bar{u}(1) = \bar{u}''(0) = \bar{u}''(1) = 0. \qquad (1.4)$$

Из асимптотического разложения (1) в работе [5] следует

$$|u'(x)| \le M, |u''(x)| \le M\varepsilon^{-1},$$

поэтому $Lu - L_2 L_1 u \le M\varepsilon$. Пусть теперь $\bar{u}(x)$ — решение (1.4), а $u(x)$ — решение (1), тогда $L(u - \bar{u}) \le M\varepsilon$ и поэтому из асимптотического разложения $u - \bar{u}$ следует $|u(x) - \bar{u}(x)| \le M\varepsilon$. Таким образом, с точностью до ε решение задачи (1)–(2) совпадает с решением задачи (1.4).

Аппроксимируя операторы L_1 и L_2 разностными операторами Λ_1 и Λ_2 на неравномерной сетке $x_i, i = 0,...,N$ получаем следующий конечно-разностный аналог задачи (1)–(2):

$$\Lambda_1^i \equiv \frac{2\varepsilon a_i}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{b_{2,i}(u_{i+1} - u_{i-1})}{2} \right) - b_i u_i = v_i, u_1 = u_N = 0, \qquad (1.5)$$

$$\Lambda_2^i \equiv \frac{2\varepsilon a_i}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h_i} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{b_{2,i}}{2}(v_{i+1} - v_{i-1}) \right) - (c_{2,i} + b'_{2,i}) v_i = f_i, \qquad (1.6)$$

$$v_0 = v_N = 0, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0,...,N.$$

Теорема 1. Пусть $c_2(x) + b_2'(x) \ge 0$, тогда верна оценка:

$$|u_i - u(x_i)| \ge M(h^2 + \varepsilon + |R_i|, \qquad (1.7)$$

где u_i — решение $\Lambda_1 \Lambda_2 u = f(x_i)$, $u(x)$ — решение (1)–(2), R_i — погрешность аппроксимации уравнения (1.2) схемой (1.5).

Доказательство. Схема (1.6) при $h_i \ge 0.5 b_{2,i}$ удовлетворяет принципу максимума, из которого следует:

$$|v_i - v(x_i)| \le M(|v_1 - v(x_1)| + |v_N - v(x_N)| + R_i^1),$$

где R_i^1 — погрешность аппроксимации уравнения (1.2) схемой (1.6). Очевидно, что $|R_i^1| \le Mh^2, |v_i - v(x_i) + R_i^1| \le M\varepsilon$, поэтому $|v_i - v(x_i)| \le M(h^2 + \varepsilon)$. Схема (1.5) также удовлетворяет принципу максимума и для погрешности $u_i - u(x_i)$ верна оценка:

$$|u_i - u(x_i)| \le |u_1 - u(x_1)| + |u_N - u(x_N)| + |R_i| + |v_i - v(x_i)| \le$$

$$\le M\left|0.5 h_1^2 u''(\xi_1) + 0.5 h_N^2 u''(\xi_2)\right| + |R_i| + h^2 + \varepsilon, \quad \xi_1 \in (x_0, x_1), \xi_2 \in (x_{N-1}, x_N).$$

Теорема доказана.

Неравномерную разностную сетку $x_i, i = 0,...,N$ построим с помощью отображения:

$$x(q)=\begin{cases} x_1(q),\ 0\le q\le 0.5,\\ 1-x_1(1-q),\ 0.5\le q\le 1,\end{cases}$$

$$x_1(q)=\begin{cases} \dfrac{\varepsilon q}{p-q},\ 0\le q\le q_0,\\ x_0+\dfrac{1-2x_0}{1-2q_0}(q-q_0),\ q_0\le q\le 0.5,\end{cases} \tag{1.8}$$

$$p=(1+\varepsilon^{\alpha})q_0,\ q_0\in(0,1),\ 0\le\alpha\le 0.5,$$

удовлетворяющего следующим условиям:

$$x(0)=0,\ x(1)=1,\ x(q)\in C[0,1],\ \frac{dx}{dq}>0,\ |R_i|\le Mh^2,\ h_i^2u''(x_i)\le Mh^2.$$

Теорема 2. Пусть $b(x)\in C^4[0,1],\ a(x),c(x),f(x)\in C^2[0,1]$ и $c_2(x)+b_2'(x)\ge 0$, тогда имеет место оценка:

$$|u_i-u(x_i)|\le M(h^2+\varepsilon) \tag{1.9}$$

где u_i — решение (1.5)–(1.6) при $x(q)$ определенном (1.8).

Доказательство. Так как $b(x)\in C^4[0,1],\ c(x)\in C^2[0,1]$ и $c_2(x)+b_2'(x)\ge 0$, то $v(x)\in C^4[0,1]$ и $\left|v^{(n)}(x)\right|\le M$ при $n\le 4$, где $v(x_i)$ — решение задачи:

$$L_2v=f(x),\ v(0)=v(1)=0.$$

А для решения задачи:

$$L_1u=v(x),\ u(0)=u(1)=0,$$

верна оценка

$$\left|u^{(n)}(x)\right|\le M\left(\varepsilon^{\bar n}+\varepsilon^{-n}\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)+\exp\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right)\right),\ n\le 4,\ \bar n=\min(0,2-n), \tag{1.10}$$

которая доказывается аналогично оценке для задачи $\varepsilon u''-c^2u=f(x)$, полученной в работе [8]. Для доказательства (1.9) достаточно показать

$$\left|R_i^1\right|\le Mh^2,\ \left|0.5h_i^2u(\xi)\right|\le Mh^2.$$

Эти оценки доказываются так же, как и в работе [8]. Для этого нужно воспользоваться (1.10) и рассмотреть R_i и $h_i^2u(\xi)$ отдельно при $0\le i\le N/4-2,\quad N/4+1\le i\le N/2$, а при $i=N/4-1,\quad i=N/4$ рассмотреть два случая: 1) $\varepsilon\ge h$; 2) $\varepsilon\le h$. Во всех случаях получаем $\left|R_i^1\right|\le Mh^2$, $\left|0.5h_i^2u(\xi)\right|\le Mh^2$ и значит из (1.10) следует (1.9). *Теорема доказана.*

Замечание. При $\varepsilon>h^{2/5}$ целесообразно решать методом, изложенным в [4].

Теперь рассмотрим задачу (1)–(3). Имеем:

$$|u(x)-\overline{u}(x)| \le M\varepsilon^2,$$

где $\overline{u}(x)$ — решение задачи (1.4) при граничных условиях (3). Аналогично теореме 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Пусть u_i — решение (1.6)–(1.7) с соответствующими граничными условиями, $u(x)$ — решение (1)–(3), тогда имеет место оценка

$$|u_i - u(x_i)| \le M(h^2+\varepsilon).$$

2 Метод интегральных тождеств

Во втором подходе оператор L аппроксимируем на неравномерной сетке $x_i, i=0,...,N$ следующей разностной схемой, полученной с помощью метода интегральных тождеств [7]:

$$L^h u \equiv (A^h u_{\bar{x}\hat{x}})_{\bar{x}\hat{x}} - (B^h u_{\bar{x}})_{\hat{x}} + C^h u_i = F^h,\ 0 \le i \le N,$$

$$u_{\bar{x}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}},\ u_{\hat{x}} = \frac{u_{i+1}-u_i}{h_i^c},\ h_i = x_{i+1}-x_i,\ h_i^c = 0.5(x_{i+1}-x_{i-1}),$$

$$A^h = \varepsilon\left(\frac{1}{2h_i^c}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{dx}{a(x)}\right)^{-1},\ B^h = \left(\frac{1}{h_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{b(x)}\right)^{-1}, \tag{2.1}$$

$$C^h = \left(\frac{1}{2h_i^c}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{dx}{c(x)}\right)^{-1},\quad F^h = \frac{1}{2h_i^c}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx,$$

с краевыми условиями:

$$u_0 = 0,\quad u_{-1}+u_1 = 0,\quad u_N = 0,\quad u_{N-1}+u_{N+1} = 0; \tag{2.2}$$

$$u_0 = 0,\quad u_{-1}-u_1 = 0,\quad u_N = 0,\quad u_{N-1}-u_{N+1} = 0. \tag{2.3}$$

При аппроксимации которых введены фиктивные точки $x_{-1} = -x_1$, $x_{N+1} = 2 - x_{N-1}$ вне интервала [0,1].

Для схемы (2.1) пока не удалось доказать аналитически равномерной сходимости численного решения к точному. Поэтому порядок равномерной сходимости находился численным экспериментом. Решение системы разностных уравнений (2.1) проводилось немонотонной прогонкой.

Применим вышеописанный численный алгоритм для решения линеаризованной задачи о продольно-поперечном изгибе упругой балки с заделанными концами под действием распределенной нагрузки $P(x)$ [2]. Эту задачу можно выразить в соответствующих безразмерных координатах, используя характерную интенсивность нагрузки Q и относя длины к длине балки L, так что $P(x) = Qp(x)$, $0 \le x \le 1$, $x = X/L$. Прогиб балки $U(X)$ относительно нейтральной оси удобно отнести к прогибу струны

QL^2/T, т. е. $u(x)=\dfrac{T}{QL^2}U(x)$, где T — постоянное продольное усилие. Получающееся безразмерное уравнение и граничные условия имеют вид:

$$\begin{gathered}\varepsilon u^{(4)}-u''=p(x),\ 0\le x\le 1,\\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0.\end{gathered}\tag{2.4}$$

Малый параметр задачи $\varepsilon=\dfrac{EI}{TL^2}$, где E — постоянный модуль упругости, I — постоянный момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси, оценивает относительное значение жесткости изгиба в сравнении с продольным усилием. При $p(x)=const=c^{-1}$ точное решение имеет вид:

$$cu(x)=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}-1}\left(e^{x/\sqrt{\varepsilon}}+e^{(x-1)/\sqrt{\varepsilon}}\right)+x^2-x-\frac{e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}+1}{e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}-1}\sqrt{\varepsilon}.\tag{2.5}$$

В табл. 1–2 приводятся результаты расчетов по схеме (2.1) соответственно на равномерной и неравномерной сетке (1.8), где $\delta_h=\max\limits_i\left|u_i^h-u(x_i)\right|$, $\delta_h^1=\sqrt{\varepsilon}\max\limits_i\left|u_{\bar{x}\hat{x},i}^h-u''(x_i)\right|$, u_i^h — решение (2.1)–(2.2) при $h=1/40$, $u(x)$ — точное решение (2.5).

Таблица 1

ε	δ_h	$\delta_{h/2}$	δ_h^1	$\delta_{h/2}^1$
10^{-2}	7.8*10^{-4}	1.9*10^{-4}	7.7*10^{-3}	1.9*10^{-3}
10^{-3}	2.2*10^{-3}	6.0*10^{-4}	7.0*10^{-2}	1.9*10^{-2}
10^{-4}	3.8*10^{-3}	1.5*10^{-3}	3.8*10^{-1}	1.5*10^{-1}
10^{-5}	2.4*10^{-3}	1.8*10^{-3}	7.6*10^{-1}	5.5*10^{-1}
10^{-6}	9.2*10^{-4}	8.4*10^{-4}	9.2*10^{-1}	8.4*10^{-1}
10^{-7}	3.1*10^{-4}	3.0*10^{-4}	9.8*10^{-1}	9.5*10^{-1}
10^{-8}	9.9*10^{-5}	9.8*10^{-5}	9.9*10^{-1}	9.8*10^{-1}

Таблица 2

ε	δ_h	$\delta_{h/2}$	δ_h^1	$\delta_{h/2}^1$
10^{-2}	1.4*10^{-3}	3.5*10^{-4}	1.1*10^{-2}	2.7*10^{-3}
10^{-3}	5.3*10^{-4}	1.4*10^{-4}	1.5*10^{-2}	3.7*10^{-3}
10^{-4}	1.7*10^{-4}	4.3*10^{-5}	1.7*10^{-2}	4.3*10^{-3}
10^{-5}	5.8*10^{-5}	1.5*10^{-5}	1.9*10^{-2}	4.7*10^{-3}
10^{-6}	1.9*10^{-5}	4.8*10^{-6}	2.0*10^{-2}	4.9*10^{-3}
10^{-7}	6.2*10^{-6}	1.6*10^{-6}	2.0*10^{-2}	5.1*10^{-3}
10^{-8}	2.0*10^{-6}	5.0*10^{-7}	2.0*10^{-2}	5.1*10^{-3}

Из этих таблиц видно, что на неравномерной сетке с уменьшением шага вдвое погрешности δ_h, $\delta_{h/2}$ уменьшаются в 4 раза (т.е. точность $o(h^2)$) и остаются теми же с уменьшением ε, т.е. достигается равномерная по малому параметру ε сходимость с точностью $o(h^2)$. Кроме этого, величина $\sqrt{\varepsilon}u^h_{\bar{x}\hat{x}}$ применяемая для вычисления внутреннего напряжения на равномерной сетке вычисляется с погрешностью δ^1_h до 100%.

Заключение

В работе рассматривается дифференциальное уравнение 4-го порядка с малым параметром при старшей производной (1) с краевыми условиями двух видов. Предлагается алгоритм решения сингулярно возмущенной краевой задачи 4-го порядка, основанный на применении специальной неравномерной разностной сетки. Оператор L аппроксимируется двумя способами: 1) L заменяется на более удобный оператор, который расщепляется на два оператора, т.е. вместо одного уравнения (1) рассматривается система двух уравнений второго порядка (этот способ легко реализуется для случая гладких коэффициентов $a(x), b(x), c(x)$ ([6])); 2) методом интегральных тождеств L аппроксимируется на пятиточечном шаблоне (в этом случае коэффициенты могут быть разрывными [7]).

При первом подходе доказаны впервые теоремы о равномерной сходимости по малому параметру на предложенной в работе неравномерной разностной сетке. При втором подходе порядок равномерной сходимости находился численным экспериментом. Решение системы разностных уравнений проводилось немонотонной прогонкой. Описанный численный алгоритм был применен для решения линеаризованной задачи о продольно-поперечном изгибе упругой балки с заделанными концами под действием распределенной нагрузки. Численным экспериментом показано, что достигается равномерная по малому параметру ε сходимость с точностью $o(h^2)$ на предложенной неравномерной разностной сетке (1.8).

Предложенные в данной работе алгоритмы решения сингулярно возмущенных краевых задач 4-го порядка могут быть применены для решения практических задач в теории оболочек и упругости, в том числе с разрывными коэффициентами.

Литература

1. Корнев В. М., Шкутин Л. И. О реализации разностных схем при наличии краевого эффекта (погранслоя) // Прикладная механика. 1972. Т. 8, вып. 10. С. 132–134.

2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. Москва: Мир, 1972. 276 с.

3. Alspauch D. W., Kagiwada H. H., Kalada R. Application of invariant imbedding to the buckling of columns // J. Comp. Phys. 1970. V. 5, N. 1. P. 56–69.

4. Корнев В. М., Степаненко С. В. Численная реализация краевых задач с сингулярно-возмущенным дифференциальным оператором // Численные методы механики сплошной среды. 1981. Т. 12, № 5. С. 76–84.

5. Вишик М. М., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1960. Т. 15, вып. 3. С. 3–81.

6. Лисейкин В. Д. Применение неравномерных сеток для построения равномерно-сходящихся алгоритмов численного решения сингулярно-возмущенных задач // Численные методы динамики вязкой жидкости. Новосибирск, 1983. С. 227–230.

7. Самарский А. А., Хао Шоу. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнения четвертого порядка // Вычислительные методы и программирование. Москва: Изд-во МГУ, 1967. Вып. 6. С. 3–16.

8. Бахвалов Н. С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.

Статья поступила в редакцию 11.12.2022; одобрена после рецензирования 14.12.2022; принята к публикации 14.12.2022.

NUMERICAL SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE 4TH ORDER

Purbo L. Abiduev
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
Buryat State Agricultural Academy
8 Pushkina St., Ulan-Ude 670024, Russia

Tumen G. Darmaev
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
Buryat State University named after D.Banzarov
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Vladimir D. Liseikin
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Leading Researcher
Federal Research Center Information and computing technologies
6 Academician Lavrentiev St., Novosibirsk 630090, Russia

Abstract. This paper deals with a 4th-order differential equation with a small parameter at the higher derivative. A solution algorithm is proposed based on the application of a special non-uniform difference grid, with the differential equation operator approximated in two ways: 1) the 4th order operator is replaced by a more convenient operator, which is split into two operators, i.e. instead of one equation, a system of two equations of the second order is considered; 2) by the method of integral identities, the operator is approximated on a five-point pattern. In the first approach, theorems on uniform convergence on the non-uniform difference grid proposed in the work have been proved. In the second approach, the order of uniform convergence was shown by numerical experiment. The solution of the system of difference equations was carried out by a non-monotonic run. The described numerical algorithm was used to solve the linearized problem of longitudinal-transverse bending of an elastic beam with embedded ends under the action of a distributed load.

Keywords: numerical solution, singularly perturbed boundary value problem of the 4th order, uniform convergence, method of integral identities, non-uniform difference grid.

For citation

Abiduev P. L., Darmaev T. G., Liseikin V. D. Numerical Solution of Singularly Perturbed Boundary Value Problems of the 4th Order // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2022. N. 4. P. 3–11.

The article was submitted 11.12.2022; approved after reviewing 14.12.2022; accepted for publication 14.12.2022.