

Научная статья

УДК 51-7

DOI: 10.18101/2304-5728-2024-4-48-57

## АЛГОРИТМ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПАКЕТЕ PYTHON

© Ханхасаев Владислав Николаевич

кандидат физико-математических наук, доцент

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления

Россия, 670033, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В, стр. 1;

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

hanhvladnick@mail.ru

© Жамцаев Никита Сергеевич

аспирант,

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

nikita91797@gmail.com

**Аннотация.** В работе рассматривается математическая модель для смены режимов коммутации электрической дуги. В отличие от квазистационарного теплового режима амплитудного горения дуги, хорошо описываемого классическим параболическим уравнением теплопроводности, в области перехода переменного тока через 0, когда дугу отключают современными выключателями в среде элегаза, необходимо применять гиперболическое уравнение в связи с существенной нестационарностью протекаемого процесса. Отсюда возникает постановка начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения, а также необходимость ее исследования с учетом нелинейности коэффициента теплопроводности. Для нее разработаны алгоритм и программа численного решения в широко используемом в настоящее время пакете программирования Python с визуализацией в графическом пакете Matplotlib и применением метода неявных конечно-разностных схем для краевых условий первого рода.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение теплопроводности, метод конечных разностей, нелинейные уравнения смешанного типа, краевые условия первого рода.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №23-21-00269, <https://rscf.ru/project/23-21-00269/>.

**Для цитирования**

*Ханхасаев В. Н., Жамцаев Н. С.* Алгоритм и численное решение нелинейного смешанного уравнения теплопроводности в пакете Python // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2024. № 4. С. 48–57.

**Введение**

Процессы нагревания и охлаждения металлов и других материалов представляют собой важную область исследований в промышленности, где тепловые явления играют ключевую роль и их тепловые характеристики подчиняются различным нелинейным явлениям. Одним из важных аспектов при исследовании этих процессов является учет резкого нагрева стержня (например, при сварке), возникающего между поверхностью металла и окружающей средой [7], что существенно влияет на вид зависимости удельной теплопроводности от температуры стержня и боковой теплообмен на его поверхности, а также от внутренних источников тепла.

В работах Ханхасаева В.Н. [3]–[5] изучаются математические модели для численного решения различных линейных и нелинейных гиперболических уравнений теплопроводности с созданием программ в пакетах программирования Фортран(Fortran) и Mathcad-15, широко применяемых в инженерной среде. Для исследования процессов, происходящих за короткий промежуток времени в частности, при отключении электрической дуги с помощью современных коммутационных аппаратов, часто используют обобщённый закон Фурье для расчёта температурных полей [3]. Фронт возникающей тепловой волны отражается тогда гиперболическим уравнением теплопроводности, которое позволяет моделировать распространение тепловых волн с конечной скоростью, в отличие от параболического уравнения, соответствующего классическому закону Фурье [3] - [6].

В данной работе исследуется одна из нелинейных постановок аналогичных начально-краевых задач, но с созданием существенно нового алгоритма и метода численного решения по неявной разностной схеме в широко применяемом в настоящее время языке программирования Python с визуализацией в графическом пакете Matplotlib.

**1 Постановка начально-краевой задачи**

Изучая протекаемые события, разработаем математическую модель упомянутого процесса одномерной теплопроводности, представленной квазилинейным гиперболическим уравнением:

$$b(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x}) + c(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

где  $b(x, t)$  — тепловой релаксационный коэффициент,  $a(x, t)$  — произведение удельной плотности на удельную теплоемкость,  $\lambda(x, t, u)$  — нелинейный коэффициент теплопроводности,  $c(x, t)$  — коэффициент боковой теплоотдачи на поверхности дуги,  $f(x, t)$  — внутренний источник теплового нагрева или охлаждения.

Краевые условия первого рода задают температуру левого и правого концов дуги:

$$u(0, t) = g_0(t), u(X, t) = g_1(t), 0 < t \leq T. \quad (2)$$

Начальное условие определяет распределение температуры в электрической дуге в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq X. \quad (3)$$

При  $0 < t \leq T/2$ , когда процесс теплопроводности квазистационарен, мы принимаем  $b(x, t) = 0$  и уравнение (1) принимает вид квазилинейного параболического уравнения:

$$a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x}) + c(x, t)u + f(x, t). \quad (4)$$

## 2 Алгоритм численного решения параболического этапа

Проводим дискретизацию по переменным  $x$  и  $t$ , вводя дискретную сеточную функцию  $U_i^j$  для приближенного решения начально-краевой задачи (2,3,4). Составим конечно-разностное уравнение дискретной задачи параболического этапа. В этом случае, неявная разностная схема будет выглядеть так:

$$a(x_i, t_j) \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{\tau} = \frac{1}{h^2} [\lambda_{i+\frac{1}{2}}^j (U_{i+1}^j - U_i^j) - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^j (U_i^j - U_{i-1}^j)] + c(x_i, t_j)U_i^j + f(x_i, t_j), \quad (5)$$

где теплопроводности  $\lambda_{i\pm\frac{1}{2}}^j$  в выражениях для сеточных аналогов тепловых потоков (эффективные теплопроводности отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $[x_i, x_{i+1}]$ ) определим по формулам:

$$\lambda_{i\pm\frac{1}{2}}^j = [\lambda(x_i, t_j, 0.5(U_{i\pm 1}^{j-1} + U_i^{j-1}))]. \quad (6)$$

Здесь, в изучаемой схеме (5) эффективные теплопроводности  $\lambda_{i\pm\frac{1}{2}}^j$  находятся по значениям  $U_i^{j-1}$  предыдущего временного слоя по формулам (6), т.е. при решении разностных уравнений относительно значений  $U_i^j$  на текущем временном слое  $t_j$  эти коэффициенты известны и

система (5) является линейной относительно  $U_i^j$ . Решение  $U_i^j$  находим методом прогонки [1].

Различие алгоритма решения квазилинейной задачи от линейной постановки [2] состоит в том, что на каждом шаге по времени необходимо вычислять новые значения коэффициента теплопроводности  $\lambda(x, t, u)$  и заново определять коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, d_i$  канонической системы уравнений с трехдиагональной матрицей.

Перегруппируем в левой части уравнения (5) члены, содержащие значения дискретной функции  $U$  на  $j$ -ом шаге по времени, а в правую часть перебросим оставшиеся члены:

$$\begin{aligned} -\frac{\tau\lambda_{i+\frac{1}{2}}^j}{h^2}U_{i+1}^j + (-c(x_i, t_j)\tau + \frac{\tau\lambda_{i+\frac{1}{2}}^j}{h^2} + \frac{\tau\lambda_{i-\frac{1}{2}}^j}{h^2} + a(x_i, t_j))U_i^j - \frac{\tau\lambda_{i-\frac{1}{2}}^j}{h^2}U_{i-1}^j = \\ = a(x_i, t_j)U_i^{j-1} + f(x_i, t_j)\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражения для коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$  канонической системы метода прогонки [1] можем получить из соответствующих уравнений разностной схемы:

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{\tau\lambda_{i+\frac{1}{2}}^j}{h^2}, \\ b_i &= -c(x_i, t_j)\tau + \frac{\tau\lambda_{i+\frac{1}{2}}^j}{h^2} + \frac{\tau\lambda_{i-\frac{1}{2}}^j}{h^2} + a(x_i, t_j), \\ c_i &= -\frac{\tau\lambda_{i-\frac{1}{2}}^j}{h^2}, \\ d_i &= -a(x_i, t_j)U_i^{j-1} - f(x_i, t_j)\tau. \end{aligned}$$

С учётом этих обозначений, равенство (7) будет иметь вид:

$$a_i U_{i+1}^j + b_i U_i^j + c_i U_{i-1}^j + d_i = 0. \quad (8)$$

После определения всех требуемых компонентов, поиск решения системы уравнений (8) производится методом прогонки [1]-[2] с учетом нелинейного коэффициента теплопроводности.

### 3 Начальные условия для гиперболического этапа

При  $T1 < t \leq T$  мы принимаем коэффициент тепловой релаксации  $b(x, t) > 0$  и уравнение (1) принимает гиперболический тип, для которого задаем первое начальное условие  $u(x, T1)$  из предыдущего расчета для параболического этапа при  $t = T1$ , а второе начальное условие для гиперболического уравнения мы получаем аппроксимацией первой производной из параболического этапа.

Начальные условия гиперболического этапа тогда выглядят следующим образом:

$$u(x, T1) = u_1(x), 0 \leq x \leq X, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, T1) = u_2(x), 0 \leq x \leq X. \quad (10)$$

где  $u_1(x)$  — интерполяция дискретной функции  $U_i^{m1}$  на отрезке  $0 \leq x \leq X$ , а  $u_2(x)$  — интерполяция дискретной аппроксимации первой производной по времени найденной дискретной функции  $U_i^{m1}$ .

Далее проводится численный расчет для гиперболического уравнения (1) на интервале  $m1 \leq j \leq m$  по неявной схеме с применением метода прогонки для дискретного уравнения.

### 4 Алгоритм численного решения гиперболического этапа

Неявная разностная схема гиперболического этапа численного решения уравнения (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} & b(x_i, t_{j+1}) \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\tau^2} + a(x_i, t_{j+1}) \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2\tau} = \\ & = \frac{1}{h^2} [\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} (U_{i+1}^{j+1} - U_i^{j+1}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} (U_i^{j+1} - U_{i-1}^{j+1})] + \\ & \quad + c(x_i, t_{j+1}) U_i^{j+1} + f(x_i, t_{j+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Проведем такую же группировку как на параболическом этапе:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\tau^2 \lambda_{i+\frac{1}{2}}^{j+1}}{h^2} \right) U_{i+1}^{j+1} + \\ & + (-c(x_i, t_{j+1}) \tau^2 + \frac{\tau^2 \lambda_{i+\frac{1}{2}}^{j+1}}{h^2} + \frac{\tau^2 \lambda_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}}{h^2} + \frac{a(x_i, t_{j+1}) \tau}{2} + b(x_i, t_{j+1})) U_i^{j+1} + \\ & \quad + \left( -\frac{\tau^2 \lambda_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}}{h^2} \right) U_{i-1}^{j+1} = \\ & = 2b(x_i, t_{j+1}) U_i^j + \tau^2 f(x_i, t_{j+1}) + \left( \frac{a(x_i, t_{j+1}) \tau}{2} - b(x_i, t_{j+1}) \right) U_i^{j-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Получим коэффициенты:

$$a_i = \left(-\frac{\tau^2 \lambda_{i+\frac{1}{2}}^{j+1}}{h^2}\right), c_i = \left(-\frac{\tau^2 \lambda_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}}{h^2}\right),$$

$$b_i = (-c(x_i, t_{j+1})\tau^2 + \frac{\tau^2 \lambda_{i+\frac{1}{2}}^{j+1}}{h^2} + \frac{\tau^2 \lambda_{i-\frac{1}{2}}^{j+1}}{h^2} + \frac{a(x_i, t_{j+1})\tau}{2} + b(x_i, t_{j+1})),$$

$$d_i = -(2b(x_i, t_{j+1})U_i^j + \tau^2 f(x_i, t_{j+1}) + (\frac{a(x_i, t_{j+1})\tau}{2} - b(x_i, t_{j+1}))U_i^{j-1}).$$

С учётом этих обозначений, равенство (12) будет иметь вид (8).

После определения всех требуемых компонентов, поиск решения уравнения (11) с начально-краевыми условиями (9-18) производится методом прогонки, с учетом переменного коэффициента теплопроводности.

### 5 Повышение порядка аппроксимации

В этом пункте повысим порядок аппроксимации по времени для второго начального условия гиперболического этапа (10), которое проведем аналогично схеме, указанной в работе Муняева С. И. [5], но с учетом квазилинейности уравнения (1) по коэффициенту теплопроводности.

Второе начальное условие из (10) с аппроксимацией по времени первого порядка имеет вид:

$$\frac{\partial u(x_i, T1)}{\partial t} = \frac{U_i^{m_1} - U_i^{m_1-1}}{\tau} \quad (13)$$

Для получения второго порядка аппроксимации, запишем ряд Тейлора на точном решении  $u(x, t)$  по времени в окрестности  $t = T1$  и со сдвигом по времени  $\tau_2$ , обрывая его на второй производной:

$$u(x_i, T1 + \tau_2) \approx u(x_i, T1) + \tau_2 \frac{\partial u(x_i, T1)}{\partial t} + \frac{\tau_2^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, T1)}{\partial t^2}, \quad (14)$$

где, вторую производную выведем из уравнения (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = & \frac{1}{b(x, t)} \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x, t, u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}] - \frac{a(x, t)}{b(x, t)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \\ & + \frac{c(x, t)}{b(x, t)} u(x, t) + \frac{f(x, t)}{b(x, t)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Найдем отсюда неизвестное дискретное значение:

$$U_i^{m_1+1} = U_i^{m_1} + \tau_2 \frac{\partial u(x_i, T1)}{\partial t} + \frac{\tau_2^2}{2} \left[ \frac{1}{b(x_i, T1)} \frac{\partial}{\partial x} [\lambda(x_i, T1, u) \frac{\partial u(x_i, T1)}{\partial x}] - \right.$$

$$-\frac{a(x_i, T1)}{b(x_i, T1)} \frac{\partial u(x_i, T1)}{\partial t} + \frac{c(x_i, T1)}{b(x_i, T1)} U_i^{m1} + \frac{f(x_i, T1)}{b(x_i, T1)}].$$

В результате, получаем второе начальное условие для расчета гиперболического этапа с повышением порядка аппроксимации по времени до 2-го:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, T1)}{\partial t} &= \frac{U_i^{m1} - U_i^{m1-1}}{\tau_1} + \\ &+ \frac{\tau_2}{2} \left[ \frac{1}{h^2 b(x_i, T1)} [\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{m1} (U_{i+1}^{m1} - U_i^{m1}) - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^{m1} (U_i^{m1} - U_{i-1}^{m1})] - \right. \\ &\left. - \frac{a(x_i, T1)}{b(x_i, T1)} \frac{U_i^{m1} - U_i^{m1-1}}{\tau_1} + \frac{c(x_i, T1)}{b(x_i, T1)} U_i^{m1} + \frac{f(x_i, T1)}{b(x_i, T1)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Приведенный выше алгоритм может быть легко реализован на различных языках программирования, в частности, с использованием пакета Python. Далее приводится пример конкретного расчета по этой программе с визуализацией полученного результата в графическом пакете Matplotlib.

## 6 Параметры конкретного расчета и график

Входные данные :

$L = \pi$  Длина стержня

$T1 = 0.1$  Время моделирования (секунды) параболического этапа

$T2 = 0.05$  Время моделирования (секунды) гиперболического этапа

$\rho = 1$  Плотность материала (кг/м<sup>3</sup>)

$N = 500$  Количество узлов на стержне

$m1 = 100$  Количество шагов по времени

$m2 = 50$  Количество шагов по времени

$u_0(x, t_0) = \sin(x) * 100$

$\lambda(x, t, u) = u^2, c(x, t) = -10, f(x, t) = 0.$

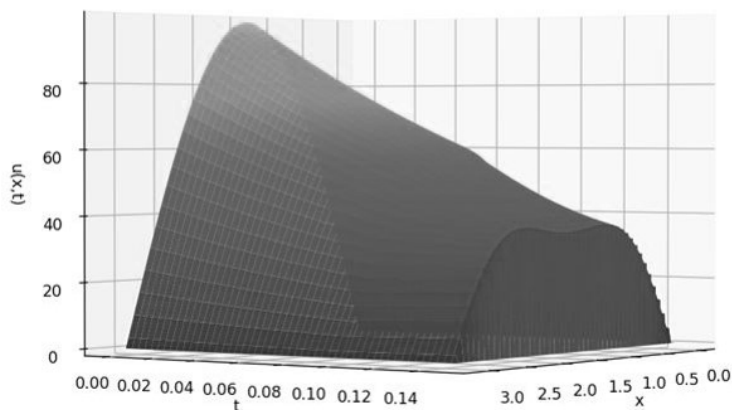


Рис. 1. График поля температуры.

### Заключение

Полученные результаты численного моделирования позволяют провести анализ влияния существенной нестационарности процесса резкого нагрева или охлаждения на теплопроводность и теплообмен в металлах и других материалах.

Эти результаты, проведенные в пакете Python подтверждают численные расчеты других аспирантов Ханхасаева В.Н., полученные в пакете MathCad-15.

Разработанный программный код представляет собой эффективный инструмент для изучения динамики изменения температуры в материале и может быть использован для оптимизации процессов нагревания и охлаждения.



### Литература

1. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена: учебное пособие для теплофизических и теплоэнергетических спец. вузов. Москва: Высшая школа, 1990. 207 с.
2. Жамцаев Н. С. Алгоритм и численное решение линейного смешанного дифференциального уравнения в пакете Python // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2024): материалы VI Международной конференции. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2024. С. 227. DOI: 10.26516/978-5-9624-2309-8.2024.1-224.
3. Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. Моделирование распределения температуры при нагреве пластины с применением смешанного уравнения теплопроводности // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2024. № 1. С. 37–45.
4. Ханхасаев В. Н., Дармахаев Э. В. О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения // Математические заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 1. С. 98–109.
5. Ханхасаев В. Н., Муняев С. И. Численное решение третьей краевой задачи для нелинейного смешанного уравнения теплопроводности // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2023. № 4. С. 14–21.
6. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. Москва: Едиториал УРПС, 2004. 296 с.
7. Петрова Л. С. Математическое моделирование процессов нагрева кусочно-однородных тел с учетом релаксации теплового потока // Наукоеведение. 2017. Т. 9, № 1. URL: <http://naukovedenie.ru/38TVN117.pdf>. С. 11.

*Статья поступила в редакцию 18.10.2024; одобрена после рецензирования 12.12.2024; принята к публикации 16.12.2024.*

### ALGORITHM AND THE NUMERICAL SOLUTION OF THE NONLINEAR MIXED HEAT EQUATION IN A PYTHON PACKAGE

*Vladislav N. Khankhasaev*

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics,  
East Siberian State University of Technology and Management  
Klyuchevskaya St. 40B, Ulan-Ude 670033, Russia  
Dorji Banzarov Buryat State University  
Smolina St. 24a, Ulan-Ude 670000, Russia  
hanhvladnick@mail.ru

*Nikita S. Zhamtsaev*

post-graduate student of the Department of Applied Mathematics  
and Differential Equations,  
Dorji Banzarov Buryat State University  
Smolina St. 24a, Ulan-Ude 670000, Russia  
nikita91797@gmail.com

*Abstract.* The paper considers a mathematical model for changing the switching modes of an electric arc. Unlike the quasi-stationary thermal mode of amplitude arc combustion, which is well described by the classical parabolic equation of thermal conductivity, in the region of the transition of alternating current through 0, when the arc is switched off by modern switches in a sulfur hexafluoride environment, it is necessary to apply a hyperbolic equation due to the significant non-stationarity of the process. This leads to the formulation of an initial-boundary value problem for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation, as well as the need to study it taking into account the nonlinearity of the thermal conductivity coefficient. An algorithm and a program for numerical solution in the widely used Python programming package with visualization in the Matplotlib graphical package and the use of the method of implicit finite-difference schemes for boundary conditions of the first kind have been developed for it.

*Keywords:* hyperbolic heat equation, finite difference method, nonlinear equations of mixed type, boundary conditions of the first kind.

*For citation*

*Khankhasaev V. N., Zhamtsaev N. S.* Algorithm and the Numerical Solution of the Nonlinear Mixed Heat Equation in a Python Package // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2024. N. 4. P. 48–57.

*The article was submitted 18.10.2024; approved after reviewing 12.12.2024; accepted for publication 16.12.2024.*