

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

---

Научная статья

УДК 51-72

DOI: 10.18101/2304-5728-2025-1-3-15

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ НА ПРОЧНОСТЬ ВЗРЫВНЫХ КАМЕР

© **Абидуев Пурбо Ламажапович**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
заведующий кафедрой системного анализа и компьютерного моделирования,  
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова  
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
apl087@yandex.ru

© **Дармаев Тумэн Гомбоцыренович**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова  
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
dtumen@mail.ru

© **Дамбаев Жаргал Гомбоевич**

доктор технических наук, профессор,  
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова  
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
g.dambaev@rambler.ru

© **Сыремпилов Владилен Сергеевич**

магистрант,  
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова  
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
syrempilov01@mail.ru

© **Петров Артем Викторович**

магистрант,  
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова  
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
retrovart15042099@gmail.com

**Аннотация.** При решении задач, связанных с прочностью стенок взрывной камеры, важно моделировать поля давления, возникающие в результате детонации газовых смесей внутри камеры. Рассматриваются два случая: один предполагает мгновенную детонацию смеси, а другой – конечную скорость распространения детонационных волн. Показано, что учет конечной скорости распространения детонационных волн необходим, так как в этом случае возникающее давление может превышать давление, рассчитанное при предположении мгновенной детонации более чем в 7,5 раза.

**Ключевые слова:** детонация газовой смеси, уравнение состояния идеального газа, первый закон термодинамики, теплоемкость газа, конечная скорость распространения детонационных волн, фронт детонационной волны, приближенная пространственно-временная диаграмма, поля давления.

#### Для цитирования

Моделирование граничных условий при расчете на прочность взрывных камер / П. Л. Абидуев, Т. Г. Дармаев, Ж. Г. Дамбаев [и др.] // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 1. С. 3–15.

### Введение

Детонация газовой смеси в камере — это сложный физико-химический процесс, характеризующийся сверхзвуковым фронтом горения и резким увеличением давления и температуры [1–3]. Детонация происходит за счет самоподдерживающегося распространения фронта горения через волну сжатия, инициирующую химические реакции [4–6].

Детонация газовой смеси в камере является сложным и многофакторным процессом, который играет значительную роль в различных областях техники и науки. Исследования в этой области продолжаются с целью повышения эффективности и безопасности детонационных процессов [7–9].

### 1 Моделирование газовой детонации при предположении мгновенной детонации

Предполагается, что детонация газовой смеси происходит мгновенно, что соответствует допущению о бесконечной скорости распространения детонационных волн. Газовая смесь моделируется как идеальный газ, что позволяет использовать уравнение состояния идеального газа для определения давления во время детонации.

Кроме того, зависимость удельной теплоемкости газа от температуры моделируется кубической параболой, а уравнение регрессии строится на основе известных табличных данных для удельной теплоемкости в зависимости от температуры. Полученные зависимости давления сравниваются с известными данными из литературных источников.

#### Вывод основных уравнений

Давление, возникающее при детонации газовой смеси, можно определить с использованием уравнения состояния идеального газа:

$$\bar{P}(\tau) = \frac{\rho RT}{\gamma}, \quad (1.1)$$

где  $\rho$ ,  $R$ ,  $\mu$ ,  $T$  — плотность газовой смеси, газовая постоянная, молекулярный вес и температура смеси.

Для вычисления температуры газа воспользуемся законом сохранения энергии, который можно записать в следующем виде. Исходя из первого закона термодинамики и определения теплоемкости получаем:

$$dU = C_v(T)dT. \quad (1.2)$$

Здесь  $U$  — внутренняя энергия газа,  $C_v(T)$  — его теплоемкость при постоянном объеме.

Тепловой поток, выделяющийся в процессе детонации, можно выразить через следующую зависимость [10]:

$$Q(\tau) = Q_1(1 - \theta)e^{-k_1\sqrt{\tau}} + Q_2e^{-k_2\tau}, \quad (1.3)$$

где  $Q_1, Q_2, \theta, k_1, k_2$  — постоянные коэффициенты, зависящие от геометрических параметров камеры, состава газовой смеси и начального давления.

Изменение внутренней энергии газа  $dU$  равно количеству тепла, распределенного по внутренней поверхности камеры:

$$dU = -Q(\tau)Sd\tau. \quad (1.4)$$

Здесь  $S$  — полная площадь внутренней поверхности камеры,  $\tau$  — время,  $Q(\tau)$  — тепловой поток из уравнения (1.3). Подставляя (1.2) и (1.4), получаем:

$$\int_{T_{v0}}^T C_v(T)dT = -S \int_0^{\tau} Q(\tau)d\tau. \quad (1.5)$$

Для удобства расчетов приближенные значения удельных теплоемкостей газа в зависимости от температуры можно аппроксимировать кубической параболой:

$$C_v(T) = \alpha T^3 + C_{v0}, \quad (1.6)$$

где  $\alpha$  — постоянная, определяемая с учетом предельного условия, вытекающего из закона сохранения энергии:

$$S \int_0^{\tau} Q(\tau)d\tau \rightarrow mQ_C \quad \text{at } \tau \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Здесь  $m$  — масса газовой смеси,  $Q_C$  — удельная теплота сгорания. Поскольку при  $\tau \rightarrow \infty$  температура газа стремится к  $T \rightarrow 0$ , из уравнений (1.2), (1.3) и (1.6) следует:

$$\int_{T_{v0}}^0 (\alpha T^3 + C_{v0}T_{v0})dT \approx -mQ_C, \quad (1.8)$$

$T_{v0}$  — температура газовой смеси при мгновенном сгорании (для смеси, где  $T_D \approx 4250^0 K$  — температура в точке Чепмена — Куге). Используя (1.8), можно выразить:

$$\alpha = 4 \frac{mQ_C - C_{v0}T_{v0}^2}{T_{v0}^4}.$$

Далее, подставляя выражения из (1.2), (1.4), (1.4) и (1.6), получаем:

$$\frac{\alpha T^4}{4} + C_{v0}T = \frac{\alpha T_{v0}^4}{4} + C_{v0}T_{v0} - S \int_0^{\tau} Q(\tau)d\tau.$$

Решая это уравнение, находим зависимость  $T = T(\tau)$ , а затем, используя (1.1), определяем зависимость  $\bar{P} = \bar{P}(\tau)$ .

Для сравнения результатов были использованы зависимости удельных теплоемкостей газа от температуры, полученные в работе [11]:

$$C_v(\mu, T) = \frac{R}{\mu} \left[ 1 + \frac{LE}{RT} + B \left( \frac{E}{RT} \right)^2 \right], \quad (1.9)$$

где  $B = \frac{(\mu_{\max} - \mu)(\mu - \mu_{\min})}{2\mu\mu_{\max} - \mu_{\min}(\mu + \mu_{\max})}$ .

Затем сопоставляются зависимости  $\bar{P} = \bar{P}(\tau)$ , найденные с использованием (1.6) и (1.9).

На рис. 1.1 представлены полученные результаты: сплошная линия показывает зависимость  $\bar{P} = \bar{P}(\tau)$  согласно данным из работы [11], а штриховая линия — аппроксимации удельной теплоемкости кубической параболой (1.6).

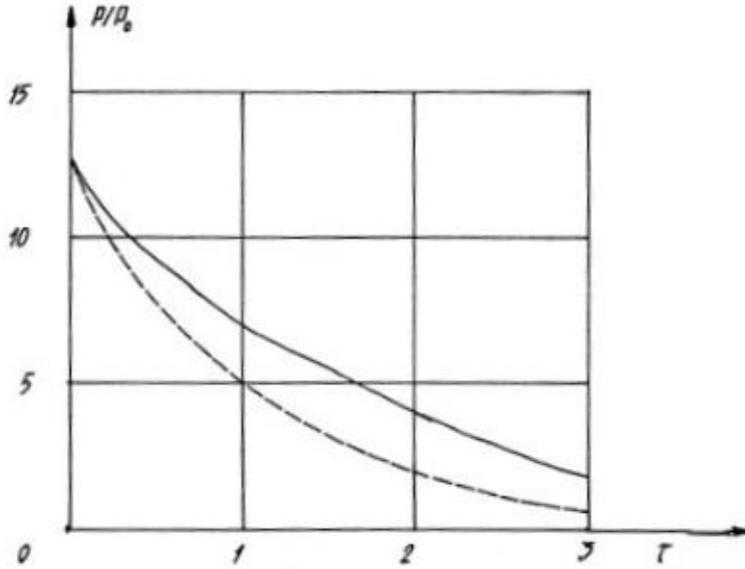


Рис. 1.1

Предполагая, что молекулярный вес газовой смеси остается неизменным  $\mu \equiv const$ , можно значительно упростить выражение для давления. Плотность газовой смеси согласно уравнению состояния:

$$P_0 = \frac{\rho R T_0}{\mu},$$

где  $P_0$  — начальное давление,  $T_0$  — начальная температура газа. В таком случае уравнение (1.1) трансформируется в:

$$\bar{P}(\tau) = \frac{P_0 T(\tau)}{T_0}.$$

Имеем

$$\bar{P}_{\max} = \bar{P}(0) = \frac{P_0 T_{v0}}{T_0}.$$

Принимая  $T_0 = 293^0 K$ ,  $T_{v0} = 3825^0 K$ , можно вывести приближенную формулу, позволяющую оценить максимальное давление, возникающее при мгновенной детонации газовой смеси газов в заданном диапазоне давления:

$$\bar{P}_{\max} = \bar{P}(0) \approx 13P_0.$$

Таким образом, были разработаны приближенные выражения для расчета давления, возникающего на внутренней поверхности взрывных камер. В основу этих расчетов легла аппроксимация зависимости удельных теплоемкостей газа  $C_v = C_v(T)$  от температуры кубической параболой. Проведено сравнение полученных выражений с данными, представленными в научных источниках.

## **2 Моделирование газовой детонации с учетом конечной скорости распространения детонационных волн**

В данной части рассматривается моделирование динамики изменения в камере с учетом конечной скорости распространения детонационных волн. В реальных условиях инициирование детонации чаще всего происходит на одном из концов камеры.

Процесс распространения детонационной волны представляется в модели в виде волны разрежения [1–3]. Слабые ударные волны, возникающие при отражении от торцевых стенок камеры, описываются одномерными бегущими с постепенно затухающей амплитудой. Коэффициент затухания подбирается таким образом, чтобы обеспечить соответствие расчетных данных результатам экспериментов как в количественном, так и в качественном аспекте.

Рассмотрим приближенную  $x, \tau$  диаграмму зависимости ( $x$  — расстояние вдоль образующей камеры,  $\tau$  — время), иллюстрирующую распространение одномерных «акустических» ударных волн в камере. После инициирования детонации на левом торце камеры фронт детонационной волны распространяется вправо. Для углеводородо-кислородных смесей скорость фронта детонации  $D$  находится в пределах  $\sim 2 \div 2,5 \cdot 10^3$  м/с [11]. Перед фронтом детонации формируется область, в которой сохраняется постоянное начальное давление:

$$P_l = P_0.$$

Профиль движущейся волны детонации в определенный момент времени  $\left(0 < \tau_0 < \frac{L}{D}\right)$  представлен на рис. 2.1.

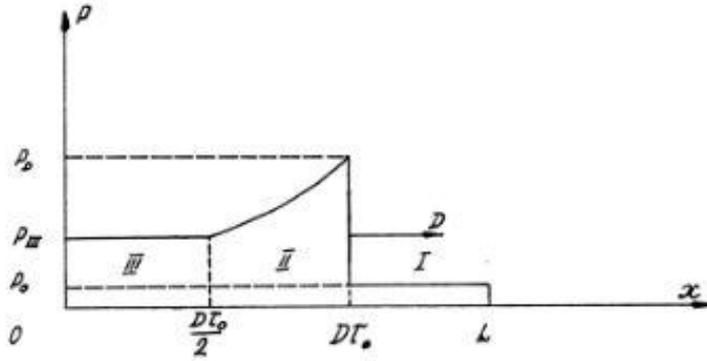


Рис. 2.1

На фронте детонационной волны давление претерпевает резкий скачок  $P_D \approx kP_0$ . Для большинства газовых смесей величина  $k$  приближается к 40 [4]. За фронтом детонации формируется область разрежения (область II на рис. 2.1), где давление подчиняется следующему уравнению [11]:

$$P_{II} = \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma D} \cdot \frac{x}{\tau} + \frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} P_D,$$

причем  $\gamma \approx 1,2$  [1]. Волна разрежения, задний фронт которой движется со скоростью  $\frac{D}{2}$ , оставляет за собой область покоя, характеризующуюся постоянным давлением  $P_{III}$  (рис. 2.1). Для определения давления  $P_{III}$  достаточно подставить  $x = \frac{D\tau}{2}$  в предыдущее уравнение. При принятых значениях параметров получаем  $P_{III} \approx 0,352P_D$ . Данный результат по своей величине оказывается близким к давлению при мгновенной детонации  $\bar{P}(\tau)$ .

После отражения от противоположной стенки камеры возникающие ударные волны начинают распространяться в обратном направлении (рис. 2.2), двигаясь уже через прдетонировавший газ со скоростью звука  $C$ , которая составляет приблизительно  $1 \div 1,4 \cdot 10^3$  м/с. Со временем амплитуда этих волн затухает, причем степень затухания в первую очередь определяется количеством пробогов вдоль камеры [7].

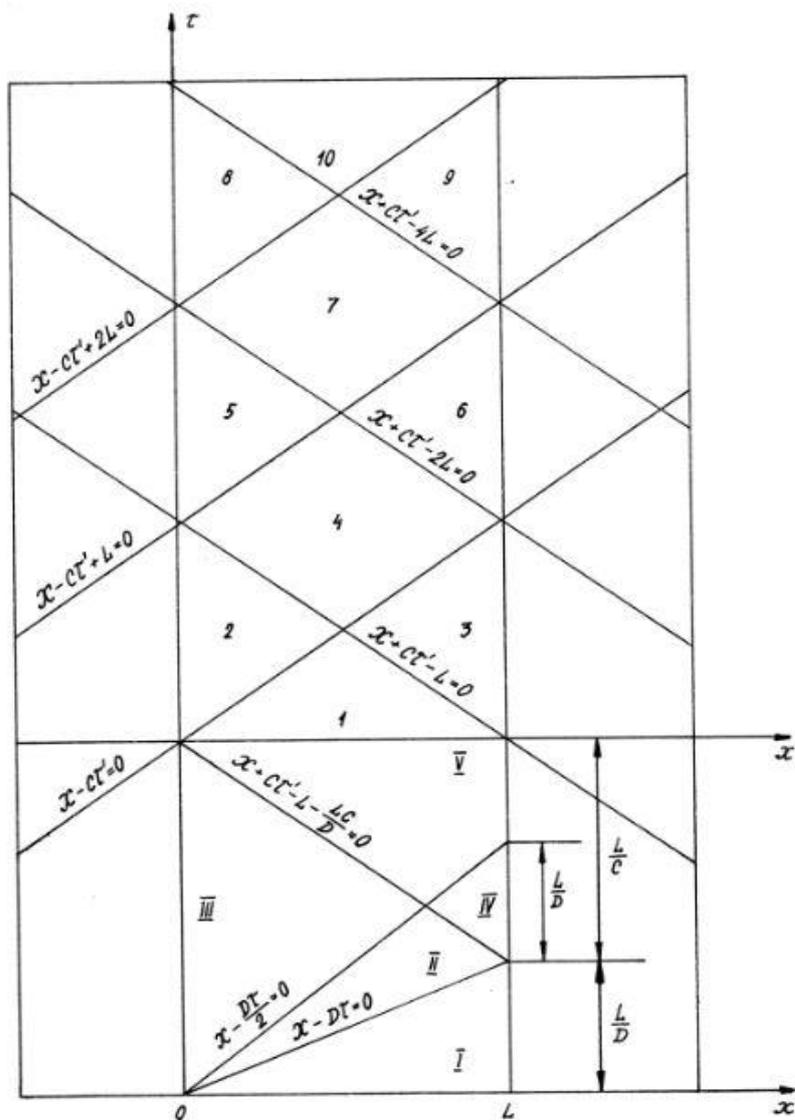


Рис. 2.2

Отраженная волна представляет собой бегущую волну, амплитуда которой постепенно уменьшается:

$$P_{om} = 1,5P_D \cdot f(\tau) \cdot \frac{2L - x - C\left(\tau - \frac{L}{D}\right)}{L},$$

где  $L$  — длина камеры.

Коэффициент затухания  $f(\tau) = 5^{-\frac{c(\tau - \frac{L}{D})}{L}}$  подбирается таким образом, чтобы динамика снижения амплитуд совпадала с результатами эксперимента [11].

В зоне IV наблюдается наибольшее давление, возникающее вследствие наложения падающей и отраженной волн:

$$P_{IV} = P_{II} + P_{ref}.$$

Максимальное значение давления в этой области  $P_{\max} \approx 2,5P_D$  достигается непосредственно на торце  $x = L$ .

В области V давление определяется как сумма давления в области III (область покоя) и давления в отраженной волне  $P_{ref}$ :

$$P_V = P_{III} + P_{ref}.$$

Области I–V на координатной плоскости  $x, \tau$  описываются системой неравенств:

Область I :

$$x - D\tau \geq 0.$$

Область II :

$$x - D\tau \leq 0, \quad x - \frac{D\tau}{2} \geq 0, \quad x + C\tau - L\left(1 + \frac{C}{D}\right) \leq 0.$$

Область III :

$$x - \frac{D\tau}{2} \leq 0, \quad x + C\tau - L\left(1 + \frac{C}{D}\right) \leq 0.$$

Область IV :

$$x - \frac{D\tau}{2} \geq 0, \quad x + C\tau - L\left(1 + \frac{C}{D}\right) \geq 0.$$

Область V :

$$x - \frac{D\tau}{2} \leq 0, \quad x + C\tau - L\left(1 + \frac{C}{D}\right) \geq 0.$$

Начиная с момента времени  $\tau = \frac{L}{D} + \frac{L}{C}$  моделирование процессов распространения и отражения волн выполняется посредством наложения слабых ударных волн треугольного профиля, движущихся в противоположных направлениях со скоростями  $C$  и обладающих уменьшающейся амплитудой (рис. 2.3).

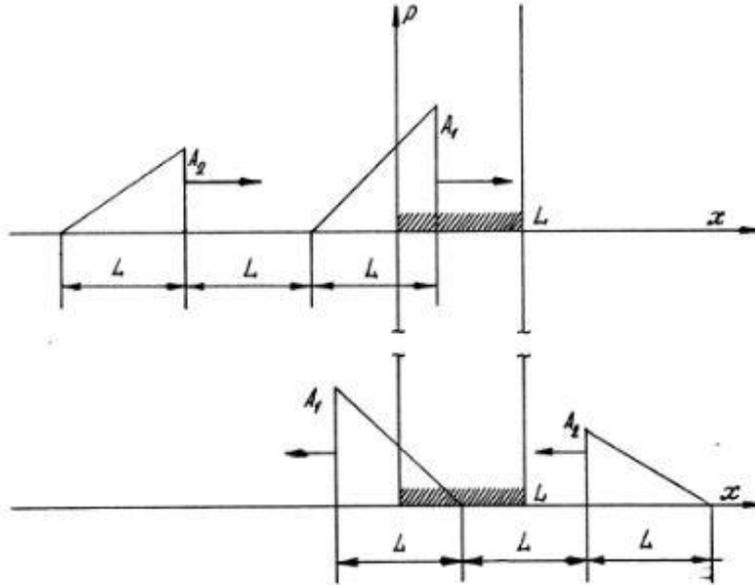


Рис. 2.3

Длины этих волн составляют  $2L$ , а амплитуды  $A_k$  определяются следующим образом:

$$A_j = A_1 \cdot e^{-\frac{j-1}{3}}, \quad j=1,2,\dots$$

где  $A_1 \approx 0,3P_D$  — амплитуда отраженной волны в момент времени  $\tau = \frac{L}{D} + \frac{L}{C}$ . Коэффициент затухания  $e^{-\frac{j-1}{3}}$  также рассчитывается на основе экспериментальных данных [11]. В результате наложения данных волн формируется система из шести областей, описываемых рекуррентно через каждые  $\frac{2L}{C}$  временных интервала. Полное давление в этих областях определяется добавлением давления  $\bar{P}(\tau)$ , соответствующего мгновенному сгоранию газовой смеси.

Значение давления в каждой из областей рассчитывается по следующим формулам (рис. 2.2):  $\left( \tau' = \tau - \frac{L}{D} - \frac{L}{C} \right)$

В области  $1+6(j-1)$ :

$$P_{1j} = -A_j \cdot \frac{x + C\tau' - 2(j-1)L}{L} + A_j + \bar{P}.$$

В области  $2+6(j-1)$

$$P_{2j} = -2A_j \cdot \frac{C\tau'}{L} + 2(2j-1)A_j + \bar{P}.$$

В области  $3 + 6(j-1)$

$$P_{3j} = \bar{P}.$$

В области  $4 + 6(j-1)$

$$P_{4j} = A_j \cdot \frac{x - C\tau' + 2(j-1)L}{L} + A_j + \bar{P}.$$

В области  $5 + 6(j-1)$

$$P_{5j} = \bar{P}.$$

В области  $6 + 6(j-1)$

$$P_{6j} = -A_{j+1} \cdot \frac{x + C\tau' - 2jL}{L} + A_{j+1} + A_j \frac{x - C\tau' - 2(j-1)L}{L} + A_j + \bar{P}.$$

Данные области на плоскости  $x, \tau'$  описываются системой неравенств

Область  $1 + 6(j-1)$  :

$$\begin{aligned} 2(j-1)L \leq x + C\tau' \leq 2(j-2)L \\ -2(j-1)L \leq x - C\tau' \leq -2(j-3)L \end{aligned}$$

Область  $2 + 6(j-1)$

$$\begin{aligned} x + C\tau' \leq 2(j-1)L \\ x - C\tau' \leq -2(j-1)L \end{aligned}$$

Область  $3 + 6(j-1)$

$$\begin{aligned} x + C\tau' \geq 2(j-1)L \\ x - C\tau' \geq -2(j-1)L \end{aligned}$$

Область  $4 + 6(j-1)$

$$\begin{aligned} (2j-1)L \leq x + C\tau' \leq 2jL \\ -(2j-1)L \leq x - C\tau' \leq -2(j-1)L \end{aligned}$$

Область  $5 + 6(j-1)$

$$\begin{aligned} x + C\tau' \leq 2jL \\ x - C\tau' \leq -(2j-1)L \end{aligned}$$

Область  $6 + 6(j-1)$

$$\begin{aligned} x + C\tau' \geq 2jL \\ x - C\tau' \geq -(2j-1)L \end{aligned}$$

Таким образом, в координатной плоскости  $x, \tau'$  сформирована система областей, где давление рассчитывается по приведенным ранее формулам, аппроксимирующим экспериментальные результаты [11]. Это позволяет в каждой точке  $x \in [0, L]$  определить временную зависимость давления. В качестве примера на рис. 2.4 представлена зависимость давления от вре-

мени на торце  $x = L$ , полученная в рамках предложенной модели. Поскольку аналитически определить давление на внутренней поверхности камеры в данной модели затруднительно, для анализа напряженно-деформированного состояния стенок камеры применяется исключительно численный метод.

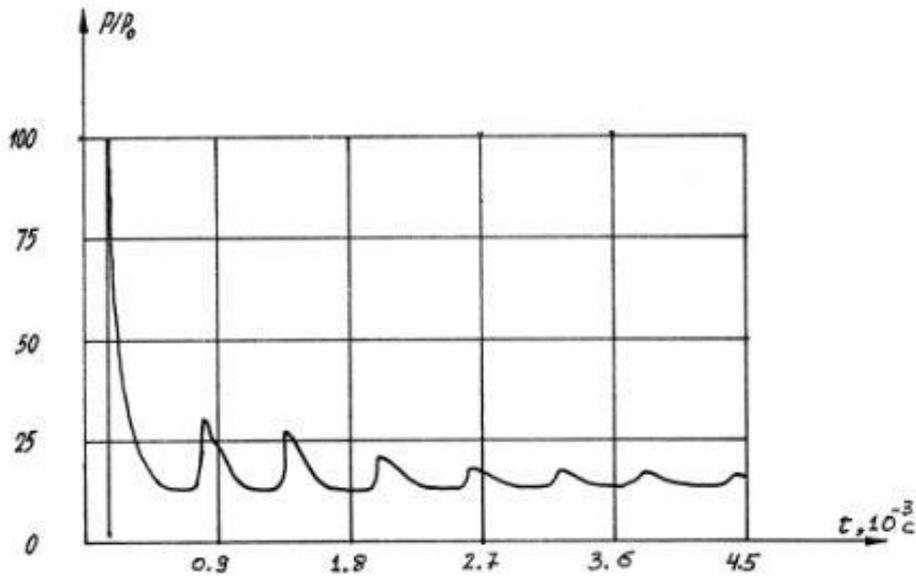


Рис. 2.4

В итоге было рассчитано давление на внутренней поверхности камер с учетом двух сценариев: мгновенной детонации и распространения детонационной волны с конечной скоростью. В последнем случае максимальное давление составило  $P_{\max} \approx 2,5P_D \approx 100P_0$ , тогда как при мгновенной детонации оно равнялось:  $\bar{P}_{\max} \approx 13P_0$ .

Для расчетов использовались следующие параметры:

$$m = 0,343 \text{ kg}, Q_C = 1,1 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}}, \rho = 11,16 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$\mu = 0,0343 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}, C_{v0} = 147 \frac{\text{J}}{\text{deg}}.$$

Состав газовой смеси  $3C_3H_8 + 19O_2$  при начальном давлении  $P_0 = 8 \text{ atm}$ . Принятые размеры цилиндрической камеры: длина  $L = 0,15 \text{ m}$ , внутренний радиус  $r_0 = 0,075 \text{ m}$ .

### Заключение

Приведенные результаты показали, что при проектировании взрывных камер необходимо учитывать конечную скорость распространения детонационной волны, поскольку в этом случае давление может превышать расчетное давление для мгновенной детонации более чем в семь раз.

### Литература

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Москва: Наука, 1996. 688 с.
2. Кутушев А. Г., Шорохова Л. В. Численное исследование процессов горения и детонации азровзвесей унитарного топлива в резкорасширяющихся трубах // Хим. Физика, 2003. Т. 22, № 8. С. 94–99.
3. Райзер Ю. П. Введение в гидрогазодинамику и теорию ударных волн для физиков. Москва: Интеллект, 2011. 431 с.
4. Хмель Т. А., Федоров А. В. Взаимодействие ударной волны с облаком частиц алюминия в канале // Физика горения и взрыва. 2002. Т. 38, № 2. С. 89–98.
5. Федоров А. В., Хмель Т. А. Численное моделирование формирования ячеистой гетерогенной детонации частиц алюминия в кислороде // Физика горения и взрыва, 2005. Т. 41, № 4. С. 84–98.
6. Федоров А. В., Харламова Ю. В., Хмель Т. А. Отражение ударной волны в облаке пыли // Физика горения и взрыва. 2007. Т. 43, № 1. С. 121–131.
7. Есиков М. А., Мали В. И. Молекулярно-динамический расчет плоского соударения металлических пластин // Наука. Промышленность. Оборона — 2012: труды XIII Всероссийской научно-технической конференции (18–20 апреля 2012 г.). Новосибирск, 2012. С. 223–227.
8. Harten A. High resolution schemes for hyberbolicconservation laws. *J. Comput. Phys.* 1983; 49: 357–393.
9. Takayama K., Inoue O. Shock wave diffraction over a 90 degree sharp corner. *Shock Waves*. 1991; 1: 301–312.
10. Адодин С. М., Манжалей В. И. О теплопередаче продуктов детонации газовой смеси в камере // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1986. Вып. 74.
11. Николаев Ю. А., Фомин П. А. О расчете равновесных течений химически реагирующих газов // Физика горения и взрыва. 1982. № 1. С.77–82.

*Статья поступила в редакцию 20.03.2025; одобрена после рецензирования 31.03.2025; принята к публикации 02.04.2025.*

*П. Л. Абидуев, Т. Г. Дармаев, Ж. Г. Дамбаев, В. С. Сыремпилов, А. В. Петров.*  
Моделирование граничных условий при расчете на прочность взрывных камер

MODELING OF BOUNDARY CONDITIONS IN STRENGTH ANALYSIS  
OF EXPLOSION CHAMBERS

*Purbo L. Abiduev*

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,  
Head of the Department of Systems Analysis and Computer Modeling  
Buryat State University  
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

*Tumen G. Darmaev*

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,  
Buryat State University  
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

*Zhargal G. Dambaev*

Prof., Buryat State University, Ulan-Ude, Russia  
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

*Vladilen S. Cirempilov*

Magistr,  
Institute of Math. and Informatics  
Buryat State University  
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

*Artem V. Petrov*

Magistr,  
Institute of Math. and Informatics  
Buryat State University  
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

*Abstract.* When solving problems related to the strength of explosion chamber walls, it is crucial to model the pressure fields that arise due to the detonation of gas mixtures inside the chamber. Two cases are considered: one assuming instantaneous detonation of the mixture and another assuming a finite propagation speed of detonation waves. It is shown that taking into account the finite propagation speed of detonation waves is necessary, as in this case, the resulting pressure can exceed the pressure calculated under the assumption of instantaneous detonation by more than 7.5 times.

*Keywords:* detonation of a gas mixture, ideal gas equation of state, first law of thermodynamics, gas heat capacity, finite propagation speed of detonation waves, detonation wave front, approximate space-time diagram, pressure fields.

*For citation*

*Abiduev P. L., Darmaev T. G., Dambaev Zh. G., Cirempilov V. S., Petrov A.V.*  
Modeling of Boundary Conditions in Strength Analysis of Explosion Chambers // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 1. P. 3–15.

*The article was submitted 20.03.2025; approved after reviewing 31.03.2025; accepted for publication 02.04.2025.*