Научная статья

УДК 517.977
DOI: 10.18101/2304-5728-2025-1-42-56

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ НОРМЫ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ

© Курохтин Вениамин Юрьевич
кандидат технических наук,
заведующий лабораторией методов оптимального управления
Научно-образовательного и инновационного центра системных исследований
и автоматизации
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
kurokhtin91@gmail.com

© Булдаев Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
buldaev@mail.ru

© Анахин Владимир Дмитриевич
доктор технических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
apl087@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации нормы конечного состояния нелинейной системы в классе кусочно-постоянных управлений. В рассматриваемом классе дискретно-непрерывных управляемых систем строится конструктивное условие оптимальности управления в виде задачи о неподвижной точке в пространстве допустимых управляющих параметров. Предложенный подход позволяет применить известную теорию и методы неподвижных точек для поиска экстремальных управлений. Приводятся иллюстрирующие примеры поиска экстремальных управлений предлагаемым методом неподвижных точек в известной задаче на экстремум нормы конечного состояния линейной управляемой системы. Полученные экстремальные управления сравниваются с известными решениями, полученными в рамках применения к рассматриваемым примерам альтернативного подхода параметризации управлений.

Ключевые слова: задача на экстремум нормы конечного состояния системы, условие оптимальности управления, задача о неподвижной точке, экстремальное управление.

Для цитирования

Курохтин В. Ю., Булдаев А. С., Анахин В. Д. Решение задачи на экстремум нормы конечного состояния системы на основе конечномерных аппроксимаций управления // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 1. С. 42–56.

Введение

Дискретно-непрерывные модели управляемых процессов имеют актуальность, поскольку многие современные приложения (экономические, технические и другие) не могут быть соответствующим образом описаны неизменными в течение рассматриваемого временного интервала дифференциальными уравнениями. В этом случае распространенным методом моделирования является дискретизация по управлению и состоянию, в результате чего появляются модели, неоднородные по своей структуре [1–5].

Такие дискретные модели также могут служить для анализа соответствующих непрерывных задач и поиска их приближенных решений, которые в дальнейшем могут быть использованы как начальные приближения для решений исходных задач. Этот подход прошел апробацию в различных областях [6; 7]. В некоторых объектах управление технически может изменяться лишь дискретным образом [8; 9].

Дискретизация только по управлению была рассмотрена во многих исследованиях (например, [10; 11]). В [12; 13] рассматриваются дискретно-непрерывные модели с кусочно-линейными аппроксимациями управления, в которых состояние системы на интервалах аппроксимации представляется в виде дифференциальных уравнений. В [12] задачи решаются при помощи градиентных методов, которые применяются к эквивалентным конечномерным задачам в пространстве управлений. В [13] для решения эквивалентных конечномерных квадратичных задач используются модификации методов принципа максимума. В работе [14] рассматривались задачи на экстремум нормы конечного состояния линейной системы в рамках технологии параметризации управляющей функции в классе кусочно-постоянных функций на заданной сетке узлов промежутка времени.

В данной статье рассматривается новый подход к решению задачи на экстремум нормы конечного состояния нелинейной системы на основе представления условия оптимальности в форме задачи о неподвижной точке в пространстве управлений. Указанное условие оптимальности строится на основе аналога классических формул приращения целевой функции стандартного вида с остаточными членами разложений с линейной по приращению управления главной частью приращения.

Подход иллюстрируется примерами нахождения экстремальных управлений в задачах на экстремум нормы конечного состояния линейной динамической системы. В рамках примеров рассматриваются задача на минимум и задача на максимум нормы конечного состояния. Альтернативный подход к решению рассмотренных примеров изложен в работе [14]. Проведено сравнение полученных результатов с известными результатами, полученными в рамках указанного альтернативного подхода. Сравнительный анализ результатов позволяет сделать вывод об эффективности предлагаемого подхода неподвижных точек в задачах рассматриваемого класса.

1 Задача на экстремум нормы конечного состояния системы

Задача на экстремум (минимум или максимум) нормы конечного состояния системы рассматривается в следующей постановке:

$$\|x(t_1)-a\| \to \underset{u\in V}{\text{extr}}, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t)=f\left(x(t),u(t),t\right),\ x(t_0)=x^0,\ u(t)\in U\subset R^m,\ t\in T=[t_0;t_1], \tag{2}$$

в которой функция $f(x,u,t)$ и ее частные производные по переменным x, u являются непрерывными на множестве $R^n\times U\times T$. Функция $f(x,u,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x в $R^n\times U\times T$ с константой $L>0$: $\|f(x,u,t)-f(y,u,t)\|\le L\|x-y\|$. В качестве допустимых управляющих функций $u(t)=\left(u_1(t),...,u_m(t)\right)$, $t\in T$ рассматривается множество V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в множестве $U\subset R^m$. Множество $U\subset R^m$ компактно и выпукло. Начальное состояние x^0, интервал T и вектор $a\in R^n$ фиксированы.

Типичной задачей рассматриваемого класса является задача минимизации нормы уклонения от заданного состояния системы, которая изучалась многими авторами, имеет самостоятельный характер и является вспомогательной в процессе численного решения линейной задачи быстродействия [15; 16].

Задача на максимум нормы конечного состояния (1), (2) для линейной системы относится к классу задач на максимум выпуклой функции (или задач на минимум невыпуклой функции) и является многоэкстремальной, что существенно затрудняет ее глобальное решение. Разработанные известные методы ориентированы на улучшение экстремальных управлений и построены на основе условий глобальной оптимальности [17; 18].

В работе [14] задача на экстремум нормы конечного состояния для линейной системы рассматривается в рамках аппроксимации управления в классе кусочно-постоянных функций на заданной сетке узлов промежутка времени. В результате задача оптимального управления преобразуется в конечномерный вариант на экстремум выпуклой квадратичной функции на гиперкубе.

В настоящей работе преобразование к конечномерной задаче задачи оптимального управления (1), (2) производится в классе V кусочно-постоянных векторных функций, определенных на интервале T с заданным разбиением на непересекающиеся интервалы узлами сетки $t_0=\theta_0<\theta_1<...<\theta_N=t_1$. На каждом интервале $T_k=\left[\theta_{k-1};\theta_k\right)$, $k=\overline{1,N}$

управление $u(t)$ принимает постоянное значение $u_k = (u_{1k}, ..., u_{mk}) \subset U$.

Обозначим $u(\cdot)$ — допустимое управление в задаче (1), (2) со значениями $u(t) = u_k$, $t \in T_k$, $k = \overline{1, N}$. Каждому допустимому управлению $u(\cdot) \in V$ взаимно однозначно соответствует N-мерный набор m-мерных векторов $u = \{u_1, ..., u_N\}$, $u_k \in U$, $k = \overline{1, N}$. Обозначим Z — множество допустимых наборов.

Таким образом, задачу (1), (2) можно рассматривать как специальную задачу математического программирования, в которой требуется определить набор векторов $u = \{u_1, ..., u_N\}$ на заданном разбиении интервала T на N непересекающихся интервалов так, чтобы достигался экстремум целевой функции

$$\|x(t_1) - a\| \to \underset{u=\{u_1,...,u_N\}\in Z}{\text{extr}} . \tag{3}$$

Значения $x(t)$, $t \in T_k$, $k = \overline{1, N}$ определяются последовательным интегрированием системы (2) на интервалах разбиения T_k при $u(t) = u_k$, $t \in T_k$, $k = \overline{1, N}$.

2 Задача о неподвижной точке

Рассмотрим следующую дискретно-непрерывную задачу оптимального управления:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_N)) \to \inf_{u=\{u_1, ..., u_N\}\in\Omega}, \tag{4}$$

$$\dot{x}(t) = f_k(x(t), u_k, t), x(t_0) = x^0, u_k \in U_k \subset R^{m(k)}, t \in T_k = [t_{k-1}, t_k], k = \overline{1, N}, \tag{5}$$

в которой функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на R^n, функции $f_k(x, u_k, t), k = \overline{1, N}$ и их частные производные по переменным x, u_k непрерывны на множествах $R^n \times U_k \times T_k, k = \overline{1, N}$. Допустимые управления рассматриваются в виде N-мерных наборов $m(k)$-мерных векторов $u = \{u_1, \dots, u_N\}, u_k \in U_k, k = \overline{1, N}$. Обозначим Ω множество допустимых наборов векторов управлений. Множества $U_k \subset R^{m(k)}, k = \overline{1, N}$ компактны и выпуклы. Начальное состояние x^0 и интервалы $T_k, k = \overline{1, N}$ фиксированы.

Обозначим через $x(t, v), t \in T = [t_0, t_N]$ решение системы (2) при управлении $v = \{v_1, \dots, v_N\} \in \Omega$. Значения $x(t, v), t \in T_k, k = \overline{1, N}$ определяются путем последовательного интегрирования системы (2) на интервалах T_k при $u_k = v_k, t \in T_k, k = \overline{1, N}$.

Задача (4), (5) может рассматриваться как задача математического программирования, в которой необходимо найти такой набор векторов

$u=\{u_1,\dots,u_N\}$ при заданном разбиении интервала времени T на подынтервалы $T_k=[t_{k-1},t_k]$, $k=\overline{1,N}$, чтобы выполнялось условие (4).

Задача (2), (3) приводится и является частным случаем задачи (4), (5).

Введем на каждом интервале T_k, $k=\overline{1,N}$ функцию Понтрягина:

$$H_k(\psi_k,x,w_k,t)=\langle\psi_k,f_k(x,w_k,t)\rangle,\ p_k\in R^n,\ w_k\in U^{k(n)}.$$

На каждом интервале T_k, $k=\overline{1,N}$ с помощью функции Понтрягина H_k определим дифференциальную систему для сопряженных переменных $\psi_k(t)=(\psi_{k1}(t),...,\psi_{kn}(t))$ в форме:

$$\dot{\psi}_k(t)=-H_{kx}(\psi_k(t),x(t,u),u_k,t),\ t\in T_k$$

с условиями:

$$\psi_N(t_N)=\psi(t_N),\ \psi_k(t_k)=\psi_{k+1}(t_k),\ k=\overline{1,N-1}.$$

Определим функцию $\psi(t)$, $t\in T$ соотношениями:

$$\psi(t)=\psi_k(t),\ t\in T_k,\ k=\overline{1,N}.$$

Будем использовать следующее обозначение частного приращения вектор-функции $g(y_1,\dots,y_l)$ по переменным y_{s_1},y_{s_2}:

$$\Delta_{z_{s_1},z_{s_2}}g(y_1,\dots,y_l)=g\left(y_1,\dots,z_{s_1},\dots,z_{s_2},\dots,y_l\right)-$$
$$-g\left(y_1,\dots,y_{s_1},\dots,y_{s_2},\dots,y_l\right).$$

Введем систему для переменной $\psi(t)$, $t\in T$ следующими соотношениями:

$$\dot{\psi}(t)=-H_{kx}(\psi(t),x(t),w_k,t),\ t\in T_k,\ k=\overline{1,N} \tag{6}$$

с начальным условием:

$$\psi(t_N)=-\varphi_x(x(t_N)). \tag{7}$$

Обозначим $\psi(t,v)$, $t\in T=[t_0,t_N]$ решение системы (6)–(7), полученное последовательным интегрированием на интервалах разбиения T_k, $k=\overline{1,N}$ при $w_k=v_k$, $t\in T_k$, $k=\overline{1,N}$, $x(t)=x(t,v)$, $t\in T$. Тогда в соответствии с работой [19], приращение функции (4) на управлениях u,v можно записать:

$$\Delta_v\Phi(u)=-\sum_{k=1}^{N}\int_{T_k}\Delta_{v_k}H_k\left(\psi(t,u),x(t,u),u_k,t\right)dt+o\left(\sum_{k=1}^{N}\|\Delta u_k\|\right). \tag{8}$$

Из формулы (8) следует формула стандартного вида с линейной по приращению управления главной частью приращения целевой функции:

$$\Delta_v\Phi(u)=-\sum_{k=1}^{N}\int_{T_k}\langle H_{ku}(\psi(t,u),x(t,u),u_k,t),\Delta u_k\rangle dt+o(\sum_{k=1}^{N}\|\Delta u_k\|). \tag{9}$$

В линейной по управлению задаче (1)–(2), когда функции f_k, $k=\overline{1,N}$ линейны по u, формула (8) совпадает с формулой (9).

На основе формулы (9) получаем необходимое условие оптимальности в задаче (1)–(2) для управления $u \in \Omega$ в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \left\langle H_{k_u}\left(\psi(t,u), x(t,u), u_k, t\right), w_k - u_k \right\rangle dt \le 0,\ w = \{w_1, \ldots, w_N\},$$
$$w_k \in U_k,\ k = \overline{1, N}. \tag{10}$$

Представим неравенство (10) в виде эквивалентной системы:

$$\int_{T_k} \left\langle H_{k_u}\left(\psi(t,u), x(t,u), u_k, t\right), w - u_k \right\rangle dt \le 0,\ w \in U_k,\ k = \overline{1, N}\,.$$

Данную систему можно представить в виде системы уравнений

$$u_k = \underset{w \in U_k}{\arg\max} \int_{T_k} \left\langle H_{k_u}\left(\psi(t,u), x(t,u), u_k, t\right), w \right\rangle dt,\ k = \overline{1, N}\,. \tag{11}$$

Система (11) рассматривается как задача о неподвижной точке специального оператора управления в конечномерном пространстве допустимых наборов векторов $u = \{u_1, ..., u_N\}$. Такой подход дает возможность конструировать новые методы поиска экстремальных управлений в задаче (4), (5).

3 Примеры

Рассмотрим иллюстрирующие примеры поиска экстремальных управлений в задаче на экстремум нормы конечного состояния линейной системы, основанные на предлагаемом подходе неподвижных точек.

Пример 1. Рассматривается задача оптимального по энергии управления гармоническим осциллятором [14; 20]. Дискретно-непрерывная аппроксимация задачи рассматривается в классе кусочно-постоянных управлений на интервале $T = [0; \pi]$ с точкой $\Theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$, разделяющей интервал T на два непересекающихся интервала $0 = \Theta_0 < \Theta_1 < \Theta_2 = \pi$:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u; \quad x_1(0) = -1; \quad x_2(0) = 1;$$
$$|u(t)| \le 1; \quad t \in T = [0; \pi];$$
$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\left(x_1^2(\pi) + x_2^2(\pi)\right) \to \underset{u \in V}{\mathrm{extr}}.$$

1.1. Задача на минимум целевой функции:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\left(x_1^2(\pi) + x_2^2(\pi)\right) \to \inf_{u \in V}.$$

Функция Понтрягина и стандартная сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x,u,t) \rangle - F(x,u,t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (u - x_1); \tag{12}$$

$$\dot{\psi}_k = -H_{x_k}; \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = -H_{x_1} = \psi_2; \\ \dot{\psi}_2 = -H_{x_2} = -\psi_1; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\psi_k(t_1) = -\varphi_{x_k}(x(t_1)); \quad t_1 = \pi; \quad \varphi(x(t_1)) = \frac{1}{2}\left(x_1^2(\pi) + x_2^2(\pi)\right);\\&\psi_1(\pi) = -\varphi_{x_1}(x(t_1)) = -x_1(\pi); \quad \psi_2(\pi) = -\varphi_{x_2}(x(t_1)) = -x_2(\pi).\end{aligned} \tag{14}$$

Для допустимого $u = \{u_1; u_2\}$ определим:

— при $t \in T_1 = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases} x_1(t,u) = -(1+u_1)\cos(t) + \sin(t) + u_1; \\ x_2(t,u) = (1+u_1)\sin(t) + \cos(t); \end{cases} \tag{15}$$

— при $t \in T_2 = \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$:

$$\begin{cases} x_1(t,u) = -(u_1+1)\cos(t) + (1+u_1-u_2)\sin(t) + u_2; \\ x_2(t,u) = (u_1+1)\sin(t) + (1+u_1-u_2)\cos(t). \end{cases} \tag{16}$$

Отсюда получаем систему, одинаковую на интервалах T_1 и T_2:

$$\begin{cases} \psi_1(t,u) = (u_1+u_2+1)\cos(t) + (u_2-u_1-1)\sin(t); \\ \psi_2(t,u) = -(u_1+u_2+1)\sin(t) + (u_2-u_1-1)\cos(t), \end{cases} \quad t \in T = [0; \pi].$$

Используя функцию $\operatorname{sign}(z)$, определяемую следующим образом:

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} -1, z < 0; \\ +1, z > 0; \\ w \in [-1; 1], z = 0, \end{cases}$$

и с учетом того, что $H_u(\psi, x, u, t) = \psi_2(t,u)$, задача о неподвижной точке необходимого условия оптимальности (11) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} u_1 = \operatorname{sign}\left(\int_{T_1} \psi_2(t,u)\,dt\right); \\ u_2 = \operatorname{sign}\left(\int_{T_2} \psi_2(t,u)\,dt\right). \end{cases}$$

Вычислив интегралы, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 = \operatorname{sign}(-2(u_1+1)); \\ u_2 = \operatorname{sign}(-2u_2). \end{cases} \tag{17}$$

Обозначим через z_I и z_{II} правые части соответственно первого и второго уравнений системы (17). Возможны следующие случаи:

1. $z_I > 0 \Rightarrow u_1 = 1$, но тогда имеем $z_I = -2(1+1) = -4 < 0$ — противоречие;

2. $z_I < 0 \Rightarrow u_1 = -1$, но тогда имеем $z_I = -2(-1+1) = 0$ — противоречие;

3. $z_I = -2(u_1+1) = 0$; $u_1 = -1 \in [-1;1] = \operatorname{sign}(0)$;

3.1. $z_{II} > 0 \Rightarrow u_2 = 1$, но тогда имеем $z_{II} = -2 \cdot 1 < 0$ — противоречие;

3.2. $z_{II} < 0 \Rightarrow u_2 = -1$, но тогда имеем $z_{II} = -2\cdot(-1) > 0$ — противоречие;

3.3. $z_{II} = -2u_2 = 0$; $u_2 = 0 \in [-1;1] = \operatorname{sign}(0)$.

Таким образом, имеем единственное решение системы (17) $u = \{-1;0\}$, являющееся оптимальным управлением рассматриваемой задачи. Соответствующее значение функционала составляет $\Phi(u) = 0$.

1.2. Задача на максимум целевой функции:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\left(x_1^2(\pi) + x_2^2(\pi)\right) \to \sup_{u\in V}. \tag{18}$$

Преобразуем задачу на максимум в эквивалентную ей задачу на минимум:

$$\Phi_1(u) = -\frac{1}{2}\left(x_1^2(\pi) + x_2^2(\pi)\right) \to \inf_{u\in V}.$$

Функция Понтрягина и стандартная сопряженная система сохраняют вид (12)–(13), а граничные условия (14) для сопряженной системы принимают вид:

$$\psi_1(\pi) = -\varphi_{x_1}\left(x(t_1)\right) = x_1(\pi);\quad \psi_2(\pi) = -\varphi_{x_2}\left(x(t_1)\right) = x_2(\pi).$$

Фазовые траектории на интервалах T_1 и T_2 сохраняют вид (15)–(16).

Получаем следующую сопряженную систему, одинаковую на интервалах T_1 и T_2:

$$\begin{cases}\psi_1(t,u) = -(u_1+u_2+1)\cos(t) + (u_1-u_2+1)\sin(t);\\ \psi_2(t,u) = (u_1+u_2+1)\sin(t) + (u_1-u_2+1)\cos(t),\end{cases}\quad t\in T = [0;\pi].$$

Соответственно получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}u_1 = \operatorname{sign}\left(2(u_1+1)\right);\\ u_2 = \operatorname{sign}(2u_2).\end{cases} \tag{19}$$

Обозначим через z_I и z_{II} правые части соответственно первого и второго уравнений системы (19). Возможны следующие случаи:

1. $z_I > 0 \Rightarrow u_1 = 1$; $z_I = 2\cdot(1+1) > 0$;

1.1. $z_{II} > 0 \Rightarrow u_2 = 1$; $z_{II} = 2\cdot 1 > 0$;

1.2. $z_{II} < 0 \Rightarrow u_2 = -1$; $z_{II} = 2\cdot(-1) < 0$;

1.3. $z_{II} = 2u_2 = 0$; $u_2 = 0 \in [-1;1] = \operatorname{sign}(0)$;

2. $z_I < 0 \Rightarrow u_1 = -1$; $z_I = 2\cdot(-1+1) = 0$ — противоречие;

3. $z_I = 2(u_1+1) = 0$; $u_1 = -1 \in [-1;1] = \operatorname{sign}(0)$.

Случаи 3.1, 3.2, 3.3 повторяют случаи 1.1, 1.2, 1.3.

Таким образом, находим решения системы (19) и соответствующие им значения функционала (18), представленные в таблице 1.

Таблица 1

Решение системы (19)	Значение функционала (18)
$\{-1;-1\}$	1
$\{-1;0\}$	0
$\{-1;1\}$	1
$\{1;-1\}$	5
$\{1;0\}$	4
$\{1;1\}$	5

Пример 2. Задача на экстремум нормы конечного состояния для двухступенчатой системы [14; 21]. Дискретно-непрерывная аппроксимация задачи рассматривается в классе кусочно-постоянных управлений на интервале $T=[0;2]$ с точкой $\Theta_1=1$, разделяющей интервал T на два непересекающихся интервала $0=\Theta_0<\Theta_1<\Theta_2=2$:

$$\dot{x}_1=x_2;\quad \dot{x}_2=u;\quad x_1(0)=2;\quad x_2(0)=-1;$$

$$|u(t)|\le 1;\quad t\in T=[0;2];$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\left(x_1^2(2)+x_2^2(2)\right)\to\underset{u\in V}{\mathrm{extr}}.$$

2.1. Задача на минимум целевой функции:

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\left(x_1^2(2)+x_2^2(2)\right)\to\inf_{u\in V}.$$

Функция Понтрягина и стандартная сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi,x,u,t)=\langle\psi,f(x,u,t)\rangle-F(x,u,t)=\psi_1x_2+\psi_2u;\tag{20}$$

$$\dot{\psi}_k=-H_{x_k};\quad \begin{cases}\dot{\psi}_1=-H_{x_1}=0;\\ \dot{\psi}_2=-H_{x_2}=-\psi_1;\end{cases}\tag{21}$$

$$\begin{gathered}\psi_k(t_1)=-\varphi_{x_k}(x(t_1));\quad t_1=2;\quad \varphi(x(t_1))=\frac{1}{2}\left(x_1^2(2)+x_2^2(2)\right);\\ \psi_1(2)=-\varphi_{x_1}(x(t_1))=-x_1(2);\quad \psi_2(2)=-\varphi_{x_2}(x(t_1))=-x_2(2).\end{gathered}\tag{22}$$

Для допустимого $u=\{u_1;u_2\}$ определим:

— при $t\in T_1=[0;1]$:

$$\begin{cases}x_1(t,u)=u_1\dfrac{t^2}{2}-t+2;\\ x_2(t,u)=u_1t-1;\end{cases}\tag{23}$$

— при $t\in T_2=(1;2]$:

$$\begin{cases} x_1(t,u) = u_2\dfrac{t^2}{2} + (u_1 - u_2 - 1)t + \dfrac{u_2}{2} - \dfrac{u_1}{2} + 2; \\ x_2(t,u) = u_2 t + u_1 - u_2 - 1. \end{cases} \tag{24}$$

Отсюда получаем систему, одинаковую на интервалах T_1 и T_2:

$$\begin{cases} \psi_1(t,u) = -\dfrac{3}{2}u_1 - \dfrac{1}{2}u_2; \\ \psi_2(t,u) = \left(\dfrac{3}{2}u_1 + \dfrac{1}{2}u_2\right)t - 4u_1 - 2u_2 + 1, \end{cases} \quad t \in T = [0;2].$$

Поскольку $H_u(\psi, x, u, t) = \psi_2(t,u)$, задача о неподвижной точке принимает следующий вид:

$$\begin{cases} u_1 = \operatorname{sign}\left(\int_{T_1} \psi_2(t,u)\,dt\right); \\ u_2 = \operatorname{sign}\left(\int_{T_2} \psi_2(t,u)\,dt\right). \end{cases}$$

Вычислив интегралы, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 = \operatorname{sign}\left(-\dfrac{13}{4}u_1 - \dfrac{7}{4}u_2 + 1\right); \\ u_2 = \operatorname{sign}\left(-\dfrac{7}{4}u_1 - \dfrac{5}{4}u_2 + 1\right). \end{cases} \tag{25}$$

Обозначим через z_I и z_{II} правые части соответственно первого и второго уравнений системы (25). Возможны следующие случаи:

1. $z_I > 0 \Rightarrow u_1 = 1$, но тогда имеем $z_I = -\dfrac{13}{4} - \dfrac{7}{4}u_2 + 1 > 0 \Rightarrow u_2 < -\dfrac{9}{7}$, что не удовлетворяет ограничению $|u(t)| \le 1$ по условию задачи;

2. $z_I < 0 \Rightarrow u_1 = -1$, но тогда имеем $z_I = \dfrac{13}{4} - \dfrac{7}{4}u_2 + 1 < 0 \Rightarrow u_2 > \dfrac{17}{7}$, что не удовлетворяет ограничению $|u(t)| \le 1$ по условию задачи;

3. $z_I = -\dfrac{13}{4}u_1 - \dfrac{7}{4}u_2 + 1 = 0 \Rightarrow u_1 = -\dfrac{7}{13}u_2 + \dfrac{4}{13}$;

3.1. $z_{II} > 0 \Rightarrow u_2 = 1 \Rightarrow u_1 = -\dfrac{7}{13} + \dfrac{4}{13} = -\dfrac{3}{13} \in [-1;1] = \operatorname{sign}(0)$;

$$z_{II} = -\frac{7}{4}\cdot\left(-\frac{3}{13}\right) - \frac{5}{4} + 1 = \frac{2}{13} > 0.$$

3.2. $z_{II} < 0 \Rightarrow u_2 = -1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{7}{13} + \dfrac{4}{13} = \dfrac{11}{13} \in [-1;1] = \operatorname{sign}(0)$;

$$z_{II} = -\frac{7}{4}\cdot\frac{11}{13} + \frac{5}{4} + 1 = \frac{10}{13} > 0$$ — противоречие;

3.3. $z_{II} = 0$. В этом случае система (25) сводится к системе

$$\begin{cases} -\dfrac{13}{4}u_1 - \dfrac{7}{4}u_2 + 1 = 0; \\ -\dfrac{7}{4}u_1 - \dfrac{5}{4}u_2 + 1 = 0, \end{cases}$$

имеющей решение $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$, однако управление $u_2 = \frac{3}{2} \notin [-1;1] = \operatorname{sign}(0)$ и, кроме того, не удовлетворяет ограничению $|u(t)| \leq 1$ по условию задачи.

Таким образом, единственным решением системы (25) является $u = \left\{-\frac{3}{13}; 1\right\}$, в силу единственности являющееся оптимальным управлением рассматриваемой задачи. Соответствующее значение функционала составляет $\Phi(u) \approx 0{,}038$.

2.2. Задача на максимум целевой функции:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\left(x_1^2(2) + x_2^2(2)\right) \to \sup_{u \in V}. \tag{26}$$

Преобразуем задачу на максимум в эквивалентную ей задачу на минимум:

$$\Phi_1(u) = -\frac{1}{2}\left(x_1^2(2) + x_2^2(2)\right) \to \inf_{u \in V}.$$

Функция Понтрягина и стандартная сопряженная система сохраняют вид (20)–(21), а граничные условия (22) для сопряженной системы принимают вид:

$$\psi_1(2) = -\varphi_{x_1}\left(x(t_1)\right) = x_1(2); \quad \psi_2(2) = -\varphi_{x_2}\left(x(t_1)\right) = x_2(2).$$

Фазовые траектории на интервалах T_1 и T_2 сохраняют вид (23)–(24).

Получаем следующую сопряженную систему, одинаковую на интервалах T_1 и T_2:

$$\begin{cases} \psi_1(t,u) = \dfrac{3}{2}u_1 + \dfrac{1}{2}u_2; \\ \psi_2(t,u) = -\left(\dfrac{3}{2}u_1 + \dfrac{1}{2}u_2\right)t + 4u_1 + 2u_2 - 1, \end{cases} \qquad t \in T = [0; 2].$$

Соответственно получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 = \operatorname{sign}\left(\dfrac{13}{4}u_1 + \dfrac{7}{4}u_2 - 1\right); \\ u_2 = \operatorname{sign}\left(\dfrac{7}{4}u_1 + \dfrac{5}{4}u_2 - 1\right). \end{cases} \tag{27}$$

Обозначим через z_I и z_{II} правые части соответственно первого и второго уравнений системы (27). Возможны следующие случаи:

1. $z_I > 0 \Rightarrow u_1 = 1; z_I = \frac{13}{4} + \frac{7}{4}u_2 - 1 > 0 \Rightarrow u_2 > -\frac{9}{7}$;

1.1. $z_{II} > 0 \Rightarrow u_2 = 1; z_{II} = \frac{7}{4} + \frac{5}{4} - 1 = 2 > 0$;

1.2. $z_{II} < 0 \Rightarrow u_2 = -1; z_{II} = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$;

1.3. $z_{II} = \frac{7}{4} + \frac{5}{4}u_2 - 1 = 0 \Rightarrow u_2 = -\frac{3}{5} \in [-1;1] = \mathrm{sign}(0)$;

2. $z_I < 0 \Rightarrow u_1 = -1; z_I = -\frac{13}{4} + \frac{7}{4}u_2 - 1 < 0 \Rightarrow u_2 < \frac{17}{7}$;

2.1. $z_{II} > 0 \Rightarrow u_2 = 1; z_{II} = -\frac{7}{4} + \frac{5}{4} - 1 = -\frac{3}{2} < 0$ — противоречие;

2.2. $z_{II} < 0 \Rightarrow u_2 = -1; z_{II} = -\frac{7}{4} - \frac{5}{4} - 1 = -4 < 0$;

2.3. $z_{II} = -\frac{7}{4} + \frac{5}{4}u_2 - 1 = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{11}{5} \notin [-1;1] = \mathrm{sign}(0)$, а также u_2 не удовлетворяет ограничению $|u(t)| \le 1$ по условию задачи;

3. $z_I = \frac{13}{4}u_1 + \frac{7}{4}u_2 - 1 = 0 \Rightarrow u_1 = -\frac{7}{13}u_2 + \frac{4}{13}$;

3.1. $z_{II} > 0 \Rightarrow u_2 = 1; u_1 = -\frac{7}{13} + \frac{4}{13} = -\frac{3}{13} \in [-1;1] = \mathrm{sign}(0)$;

$z_{II} = \frac{7}{4} \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) + \frac{5}{4} - 1 = -\frac{2}{13} < 0$ — противоречие;

3.2. $z_{II} < 0 \Rightarrow u_2 = -1; u_1 = \frac{7}{13} + \frac{4}{13} = \frac{11}{13} \in [-1;1] = \mathrm{sign}(0)$;

$z_{II} = \frac{7}{4} \cdot \frac{11}{13} - \frac{5}{4} - 1 = -\frac{10}{13} < 0$;

3.3. $z_{II} = 0$. В этом случае система (27) сводится к системе

$$\begin{cases} \frac{13}{4}u_1 + \frac{7}{4}u_2 - 1 = 0; \\ \frac{7}{4}u_1 + \frac{5}{4}u_2 - 1 = 0, \end{cases}$$

имеющей решение $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$, однако управление $u_2 = \frac{3}{2} \notin [-1;1] = \mathrm{sign}(0)$ и, кроме того, не удовлетворяет ограничению $|u(t)| \le 1$ по условию задачи.

Таким образом, имеем решения системы (27) и соответствующие им значения функционала (26), представленные в таблице 2.

Таблица 2

Решение системы (27)	Значение функционала (26)
$\{-1;-1\}$	6,5
$\left\{\frac{11}{13};-1\right\}$	0,96
$\{1;-1\}$	1
$\left\{1;-\frac{3}{5}\right\}$	0,9
$\{1;1\}$	2,5

Рассмотренные примеры демонстрируют возможность определения оптимальных управлений предлагаемым подходом неподвижных точек в рассматриваемом классе задач. Примеры демонстрируют возможность поиска экстремальных управлений предлагаемыми методами в рассматриваемом классе конечномерных задач без вычисления значений целевой функции, необходимых для реализации градиентных методов. Во всех рассмотренных примерах полученные оптимальные решения совпадают с решениями, полученными в работе [14] в рамках альтернативного подхода параметризации управляющей функции.

Заключение

Полученные условия оптимальности управления в форме задачи о неподвижной точке позволяют находить экстремальные управления методом поиска неподвижных точек соответствующего оператора управления. Для поиска экстремальных управлений можно применить и модифицировать известную теорию и методы неподвижных точек. Предложенный подход неподвижных точек для поиска экстремальных управлений в отличие от градиентных методов не требует вычисления значений целевой функции.

Указанные свойства предлагаемого подхода неподвижных точек являются важными факторами для повышения эффективности решения рассматриваемого класса задач на экстремум нормы конечного состояния системы и могут определять перспективное направление разработки эффективных методов оптимизации таких задач.

Литература

1. Emelyanov S., Korovin S., Mamedov I. Variable Structure Control Systems. Discrete and Digital. CRC Press, USA, 1995. 316 p.

2. The Control Handbook: Control System Advanced Methods. In: Levine, W. (eds). CRC Press, London, 2010. 1798 p.

3. Van der Schaft A., Schumacher H. An Introduction to Hybrid Dynamical Systems. Springer. London, 2000. 174 p.

4. Gurman V., Rasina I. Discrete-continuous Representations of Impulsive Processes in the Controllable Systems. *Automation and Remote Control.* 2012; 8 (73): 1290–1300. DOI: 10.1134/S0005117912080024.

5. Mastaliyev R. Necessary Optimality Conditions in Optimal Control Problems by Discrete-continuous Systems. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2015; 1 (30): 4–10. DOI: 10.17223/19988605/30/1.

6. Evtushenko Y. Numerical Optimization Techniques. Publications Division, New York, 1985. 562 p.

7. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. Москва: Наука, 1975. 279 с.

8. Gurman V., Ni Ming Kang. Degenerate Problems of Optimal Control. I. *Automation and Remote Control.* 2011; 4 (72): 497–511. DOI: 10.1134/S0005117911030039.

9. Moiseev A. Optimal Control Under Discrete Control Actions. *Automation and Remote Control.* 1991; 9 (52): 1274–1280.

10. Teo K., Goh C., Wong K. A Unified Computational Approach to Optimal Control Problem. Longman Group Limited. New York, 1991. 329 p.

11. Rahimov A. On an Approach to Solution to Optimal Control Problems on the Classes of Piecewise Constant, Piecewise Linear, and Piecewise Given Functions. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2012; 2 (19): 20–30.

12. Gorbunov V. A Method for the Parametrization of Optimal Control Problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1979; 2 (19): 292–303.

13. Srochko V., Aksenyushkina E. Parametrization of Some Control Problems by Linear Systems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 2019; 30: 83–98. DOI: 10.26516/1997-7670.2019.30.83.

14. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В., Антоник В. Г. Конечномерная аппроксимация управлений в задачах оптимизации линейных систем // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2020. № 3. С. 19–31. DOI: 10.18101/2304-5728-2020-3-19-31.

15. Тятюшкин А. И. Многометодная технология оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука, 2006. 343 с.

16. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с.

17. Антоник В. Г., Срочко В. А. Методы нелокального улучшения экстремальных управлений в задаче на максимум нормы конечного состояния // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 5. С. 791–804.

18. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.

19. Булдаев А. С., Думнов В. А. Методы неподвижных точек в одном классе дискретно-непрерывных задач оптимизации управляемых систем // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2021. № 2. С. 28–43. DOI: 10.18101/2304-5728-2021-2-28-43.

20. Галяев А. А., Лысенко П. В. Оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором // Автоматика и телемеханика. 2019. № 1. С. 21–37. DOI: 10.1134/S0005231019010021.

21. Стрекаловский А. С., Шаранхаева Е. В. Глобальный поиск в невыпуклой задаче оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 10. С. 1785–1800.

Статья поступила в редакцию 25.03.2025; одобрена после рецензирования 31.03.2025; принята к публикации 02.04.2025.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF THE EXTREMUM OF THE SYSTEM FINAL STATE NORM BASED ON FINITE-DIMENSIONAL APPROXIMATIONS OF CONTROL

Veniamin Yu. Kurokhtin
Cand. Sci. (Engineering),
Head of Laboratory of optimal control methods of Scientific, educational and innovative center for system research and automation
Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude 670000, Russia

Aleksandr S. Buldaev
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor,
Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude 670000, Russia

Vladimir D. Anakhin
Dr. Sci. (Engineering), Professor,
Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude 670000, Russia

Abstract. The problem of optimizing of the final state norm of a nonlinear system in the class of piecewise constant controls is considered. In the class of discrete-continuous controlled systems under consideration, a constructive condition for control optimality is constructed in the form of a fixed point problem in the space of admissible control parameters. The proposed approach allows one to apply the well-known theory and methods of fixed points to search for extremal controls. Illustrative examples of searching for extremal controls by the proposed fixed point method are given in the well-known problem of finding the extremum of the final state norm of a linear controlled system. The obtained extremal controls are compared with known solutions obtained within the framework of applying an alternative approach of control parameterization to the considered examples.

Keywords: problem on the extremum of the system final state norm, condition for control optimality, fixed point problem, extremal control.

For citation
Kurokhtin V. Yu., Buldaev A. S., Anakhin V. D. Solution of the Problem of the Extremum of the System Final State Norm Based on Finite-Dimensional Approximations of Control // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 1. P. 42–56.

The article was submitted 25.03.2025; approved after reviewing 31.03.2025; accepted for publication 02.04.2025.