Научная статья

УДК 517.95
DOI: 10.18101/2304-5728-2025-4-3-10

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© **Донцова Марина Владимировна**
кандидат физико-математических наук, доцент,
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23
dontsowa.marina2011@yandex.ru

Аннотация. В данной работе рассмотрена задача Коши для системы уравнений с правыми частями специального вида и постоянными коэффициентами. С помощью метода дополнительного аргумента определены достаточные условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений с правыми частями специального вида и постоянными коэффициентами. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений с правыми частями специального вида и постоянными коэффициентами опирается на глобальные оценки. Приведен пример задачи Коши для системы уравнений с правыми частями специального вида и постоянными коэффициентами, которая имеет единственное нелокальное решение. Пример показывает, что существует задача Коши для системы уравнений с правыми частями специального вида и постоянными коэффициентами, которая имеет единственное нелокальное решение.

Ключевые слова: константа, система, метод, задача Коши, уравнения, коэффициенты, решение, локальность, условия, промежуток.

Для цитирования
Донцова М. В. Система уравнений с правыми частями специального вида и постоянными коэффициентами // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 4. С. 3–10.

Введение

Рассмотрим систему

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u_0(t,x) + (a_1 u_0 + b_1 u_1 + p_1)\partial_x u_0(t,x) = a_2 u_0 + b_2 u_1 + p_3, \\ \partial_t u_1(t,x) + (c_1 u_0 + g_1 u_1 + p_2)\partial_x u_1(t,x) = g_2 u_1 + p_4, \end{array} \right. \tag{1}$$

где $u_0(t,x), u_1(t,x)$ — неизвестные функции.

В данной системе (1) a_1, b_1, b_2, c_1, g_1 — известные положительные константы, a_2, g_2, p_1, p_2, p_3, p_4 — известные константы.

Зададим начальные условия для системы (1)

$$u_0(0,x) = \varphi_0(x),\ u_1(0,x) = \varphi_1(x), \tag{2}$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ — известные функции.

Рассмотрим задачу (1), (2) на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty, +\infty),\ T > 0\}.$$

В [6] использовали метод дополнительного аргумента и определили достаточные условия нелокальной разрешимости задачи (1), (2) на Ω_T, где $a_1,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ g_1$ — известные положительные константы, $a_2,\ g_2$ — известные константы, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0$.

В данной работе используем метод дополнительного аргумента и определяем достаточные условия нелокальной разрешимости задачи (1), (2) на Ω_T, где $a_1,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ g_1$ — известные положительные константы, $a_2,\ g_2,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ — известные константы.

1 Существование локального решения

Используем метод дополнительного аргумента и получаем систему интегральных уравнений [1]–[9]:

$$z_1(s,t,x) = \varphi_0(x - \int_0^t (a_1 z_1 + b_1 z_3 + p_1)d\tau) + \int_0^s (a_2 z_1 + b_2 z_3 + p_3)d\tau, \tag{3}$$

$$z_2(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t (c_1 z_4 + g_1 z_2 + p_2)d\tau) + \int_0^s (g_2 z_2 + p_4)d\tau, \tag{4}$$

$$z_3(s,t,x) = z_2(s,s,x - \int_s^t (a_1 z_1 + b_1 z_3 + p_1)d\tau), \tag{5}$$

$$z_4(s,t,x) = z_1(s,s,x - \int_s^t (c_1 z_4 + g_1 z_2 + p_2)d\tau). \tag{6}$$

Обозначим $\Gamma_T = \{\,(s,t,x)|\,0 \le s \le t \le T,\ x \in (-\infty, +\infty),\ T > 0\}$,

$$l_1 = \max\{a_1,\ |a_2|,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ g_1,\ |g_2|,\ |p_3|,\ |p_4|\},$$

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 0,1,\ l = \overline{0,2}\},$$

$$\|F\| = \sup_{\Gamma_T} |F(s,t,x)|\,,\ \|f\| = \sup_{\Omega_T} |f(t,x)|.$$

Справедлива следующая теорема, которая доказывается так же, как в [6].

Теорема 1. Пусть $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \bar{C}^2(R)$, a_1, b_1, b_2, c_1, g_1, a_2, g_2, p_1, p_2, p_3, p_4 — известные константы и выполняются условия:

$$a_1 > 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ c_1 > 0,\ g_1 > 0,\ \varphi_0'(x) \geq 0,\ \varphi_1'(x) \geq 0 \text{ на } R.$$

Тогда для всех $0 \leq t \leq T_0$, где $T_0 = \min\Big(\frac{1}{25C_\varphi l_1}, \frac{1}{10l_1}, \frac{C_\varphi}{10l_1}\Big)$, задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $u_0(t,x), u_1(t,x) \in \bar{C}^{1,2}(\Omega_{T_0})$, которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

В теореме 1 $u_0(t,x) = z_1(t,t,x),\ u_1(t,x) = z_2(t,t,x)$.

2 Существование нелокального решения

Теорема 2. Пусть $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \bar{C}^2(R)$, a_1, b_1, b_2, c_1, g_1, a_2, g_2, p_1, p_2, p_3, p_4 — известные константы и выполняются условия:

$$a_1 > 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ c_1 > 0,\ g_1 > 0,\ \varphi_0'(x) \geq 0,\ \varphi_1'(x) \geq 0 \text{ на } R.$$

Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $u_0(t,x), u_1(t,x) \in \bar{C}^{1,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

В теореме 2 $u_0(t,x) = z_1(t,t,x),\ u_1(t,x) = z_2(t,t,x)$.

Доказательство. Продифференцируем систему уравнений (1) по x. Обозначим $f(t,x) = \partial_x u_0(t,x), \quad q(t,x) = \partial_x u_1(t,x)$, получим:

$$\begin{cases} \partial_t f + (a_1 u_0 + b_1 u_1 + p_1)\partial_x f = -a_1 f^2 - b_1 f q + a_2 f + b_2 q, \\ \partial_t q + (c_1 u_0 + g_1 u_1 + p_2)\partial_x q = -g_1 q^2 - c_1 f q + g_2 q, \\ f(0,x) = \varphi_0'(x), \quad q(0,x) = \varphi_1'(x). \end{cases} \tag{7}$$

Добавим к системе уравнений (3)–(6) два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_0(s,t,x)}{ds} = -a_1\gamma_0^2 - b_1\gamma_0\gamma_1(s,s,\eta_1) + a_2\gamma_0 + b_2\gamma_1(s,s,\eta_1), \\ \frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -g_1\gamma_1^2 - c_1\gamma_0(s,s,\eta_2)\gamma_1 + g_2\gamma_1, \end{cases} \tag{8}$$

с начальными условиями:

$$\gamma_0(0,t,x) = \varphi_0'(\eta_1), \quad \gamma_1(0,t,x) = \varphi_1'(\eta_2), \tag{9}$$

где

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int_s^t (a_1 z_1 + b_1 z_3 + p_1)d\tau,$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int_s^t (c_1 z_4 + g_1 z_2 + p_2)d\tau.$$

Перепишем (8), (9) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_0(s,t,x) = \varphi_0'(\eta_1)\exp(-\int\limits_0^s (a_1\gamma_0 + b_1\gamma_1(\tau,\tau,\eta_1) - a_2)d\tau) + \\ + \int\limits_0^s b_2\gamma_1(\tau,\tau,\eta_1)\exp(-\int\limits_\tau^s (a_1\gamma_0 + b_1\gamma_1(\nu,\nu,\eta_1) - a_2)d\nu)d\tau, \\ \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_2)\exp(-\int\limits_0^s (g_1\gamma_1 + c_1\gamma_0(\tau,\tau,\eta_2) - g_2)d\tau). \end{cases} \tag{10}$$

Так же, как в [2]–[8], доказывается существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (10). Следовательно,

$$\gamma_0(t,t,x) = f(t,x) = \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \gamma_1(t,t,x) = q(t,x) = \frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

Мы можем записать (3), (4) в виде:

$$z_1(s,t,x) = \varphi_0(\eta_1)\exp(a_2 s) + \int\limits_0^s (b_2 z_3 + p_3)\exp(a_2(s-\tau))d\tau,$$

$$z_2(s,t,x) = \varphi_1(\eta_2)\exp(g_2 s) + \int\limits_0^s p_4 \exp(g_2(s-\tau))d\tau.$$

Получаем, что

$$\|z_2\| \le (C_\varphi + T|p_4|)\exp(|g_2|T),$$

$$\|z_1\| \le C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + T(b_2(C_\varphi + T|p_4|)\exp(|g_2|T) + |p_3|),$$

следовательно, справедливы оценки:

$$\|u_1\| \le (C_\varphi + T|p_4|)\exp(|g_2|T), \tag{11}$$

$$\|u_0\| \le C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + T(b_2(C_\varphi + T|p_4|)\exp(|g_2|T) + |p_3|). \tag{12}$$

Из (10) при выполнении условий:

$a_1 > 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ c_1 > 0,\ g_1 > 0,\ \varphi_0'(x) \ge 0,\ \varphi_1'(x) \ge 0$ на R,

получаем, что $\gamma_0 \ge 0,\ \gamma_1 \ge 0$ на Γ_T, значит,

$$\|\gamma_1\| \le C_\varphi \exp(|g_2|T),\ \|\gamma_0\| \le C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tb_2\exp(|g_2|T)),$$

следовательно,

$$\|\partial_x u_1\| \le C_\varphi \exp(|g_2|T), \tag{13}$$

$$\|\partial_x u_0\| \le C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tb_2\exp(|g_2|T)). \tag{14}$$

Далее, так же, как в [2]–[8], получаем, что при всех t и x справедливы оценки:

$$\left|\partial^2_{x^2}u_0\right| \leq E_1\ ch(T\sqrt{E_2E_3}) + E_4\sqrt{\frac{E_2}{E_3}}sh(T\sqrt{E_2E_3}), \tag{15}$$

$$\left|\partial^2_{x^2}u_1\right| \leq E_4\ ch(T\sqrt{E_2E_3}) + E_1\sqrt{\frac{E_3}{E_2}}sh(T\sqrt{E_2E_3}), \tag{16}$$

где $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$ — постоянные, которые определяются через исходные данные.

Получены глобальные оценки (11)–(16), которые позволяют продолжить решение $u_0(t,x), u_1(t,x)$ на заданный промежуток $[0,\ T]$. Пусть $u_0(T_0,x), u_1(T_0,x)$ — начальные значения, $u_0(T_0,x), u_1(T_0,x) \in \bar{C}^2(R)$, тогда, используя теорему 1, продлим решение на $[T_0,\ T_1]$. Пусть $u_0(T_1,x)$, $u_1(T_1,x)$ — начальные значения, $u_0(T_1,x), u_1(T_1,x) \in \bar{C}^2(R)$, тогда, используя теорему 1, продлим решение на $[T_1,\ T_2]$. Получаем, что за конечное число шагов решение можно продлить на заданный промежуток $[0,\ T]$. Единственность решения задачи Коши (1), (2) можно доказать так же, как в [2]–[8].

3 Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \partial_t u_0(t,x) + (10u_0 + u_1 - 1)\partial_x u_0(t,x) = 200u_0 + 4u_1 + 201, \\ \partial_t u_1(t,x) + (21u_0 + 5u_1 + 2)\partial_x u_1(t,x) = 210u_1 - 400, \end{cases} \tag{17}$$

где $u_0(t,x), u_1(t,x)$ — неизвестные функции.

В данной системе

$$a_1 = 10,\ b_1 = 1,\ b_2 = 4,\ c_1 = 21,\ g_1 = 5,$$

$$a_2 = 200,\ g_2 = 210,\ p_1 = -1,\ p_2 = 2,\ p_3 = 201,\ p_4 = -400.$$

Для системы уравнений (17) определим начальные условия:

$$u_0(0,x) = \varphi_0(x) = 25 + 8arctgx,\ u_1(0,x) = \varphi_1(x) = 20 + arctgx. \tag{18}$$

Задача (17), (18) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty),\ T > 0\}.$$

Так как $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \bar{C}^2(R)$, a_1, b_1, b_2, c_1, g_1, a_2, g_2, p_1, p_2, p_3, p_4 — известные константы,

$$a_1 = 10 > 0,\ b_1 = 1 > 0,\ b_2 = 4 > 0,\ c_1 = 21 > 0,\ g_1 = 5 > 0,$$

$$\varphi_0'(x) = \frac{8}{1+x^2} > 0,\ \varphi_1'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0, \quad x \in R,$$

$$a_2 = 200,\ g_2 = 210,\ p_1 = -1,\ p_2 = 2,\ p_3 = 201,\ p_4 = -400,$$

тогда по теореме 2 для любого $T > 0$ задача Коши (17), (18) имеет единственное решение $u_0(t,x), u_1(t,x) \in \bar{C}^{1,2}(\Omega_T)$.

Зададим начальные условия для системы (17):

$$u_0(0,x) = \varphi_0(x) = 41 + 28arctgx,\ u_1(0,x) = \varphi_1(x) = 7 + 10arctgx. \quad (19)$$

Рассмотрим задачу (17), (19) на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty, +\infty),\ T > 0\}.$$

Так как $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in \bar{C}^2(R)$, a_1, b_1, b_2, c_1, g_1, a_2, g_2, p_1, p_2, p_3, p_4 — известные константы,

$$a_1 = 10 > 0,\ b_1 = 1 > 0,\ b_2 = 4 > 0,\ c_1 = 21 > 0,\ g_1 = 5 > 0,$$

$$\varphi_0'(x) = \frac{28}{1+x^2} > 0,\ \varphi_1'(x) = \frac{10}{1+x^2} > 0, \quad x \in R,$$

$$a_2 = 200,\ g_2 = 210,\ p_1 = -1,\ p_2 = 2,\ p_3 = 201,\ p_4 = -400,$$

по теореме 2 для любого $T > 0$ задача Коши (17), (19) имеет единственное решение $u_0(t,x), u_1(t,x) \in \bar{C}^{1,2}(\Omega_T)$.

Заключение

В данной работе использовали метод дополнительного аргумента и определили достаточные условия нелокальной разрешимости задачи (1), (2) на Ω_T, где a_1, b_1, b_2, c_1, g_1 — известные положительные константы, a_2, g_2, p_1, p_2, p_3, p_4 — известные константы.

Литература

1. Alekseenko S. N., Dontsova M. V., Pelinovsky D. E. Global solutions to the shallow water system with a method of an additional argument. *Applicable Analysis.* 2017; 96; 9: 1444—1465.

2. Dontsova M. V. The nonlocal solvability conditions in original coordinates for a system with constant terms. *Quaestiones Mathematicae.* 2023; 46; 8: 1599–1608.

3. Dontsova M. V. Nonlocal Solvability of the Cauchy Problem for a System with Negative Functions of the Variable t. *Armenian Journal of Mathematics.* 2023; 15; 4: 1–10.

4. Dontsova M. V. Solvability of the Cauchy Problem for a Quasilinear System in Original Coordinates. *Journal of Mathematical Sciences.* 2020; 249; 6: 918–928.

5. Dontsova M. V. The nonlocal solvability conditions for a system with constant terms and coefficients of the variable t. *KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series.* 2024; 122; 2: 27–35.

6. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, № 4. С. 71–82.

7. Донцова М. В. Условия разрешимости задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка, где $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$, S_1, S_2 — известные функции // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, № 2. С. 165–178.

8. Донцова М. В. Разрешимость задачи Коши для одной системы квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка // Владикавказский математический журнал. 2021. Т. 23, № 3. С. 64–79.

9. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т. 379, № 1. С. 16–21.

Статья поступила в редакцию 07.10.2025; одобрена после рецензирования 21.11.2025; принята к публикации 26.11.2025.

A SYSTEM OF EQUATIONS WITH SPECIAL RIGHT-HAND SIDES AND CONSTANT COEFFICIENTS

Marina V. Dontsova
Cand. Sci. (Phys. and Math.),
Associate Professor
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
Russia, 603950, Nizhny Novgorod, pr. Gagarina, 23

Abstract. In this paper, we consider the Cauchy problem for a system of equations with special right-hand sides and constant coefficients. Using the additional argument method, sufficient conditions for the nonlocal solvability of the Cauchy problem for a system of equations with special right-hand sides and constant coefficients are determined. The proof of the nonlocal solvability of the Cauchy problem for a system of equations with special right-hand sides and constant coefficients is based on global estimates. An example of the Cauchy problem for a system of equations with special right-hand sides and constant coefficients, which has a unique nonlocal solution, is given. The example shows that there is a Cauchy problem for a system of equations with special right-hand sides and constant coefficients, which has a unique nonlocal solution.

Keywords: constant, system, method, Cauchy problem, equations, coefficients, solution, locality, conditions, interval.

For citation

Dontsova M. V. A System of Equations with Special Right-Hand Sides and Constant Coefficients // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 4. P. 3–10.

The article was submitted 07.10.2025; approved after reviewing 21.11.2025; accepted for publication 26.11.2025.