Научная статья

УДК 517.53
DOI: 10.18101/2304-5728-2025-4-11-20

ЗАДАЧА МАЙЛЗА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ МОДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ

© **Нефёдова Анна Андреевна**
старший преподаватель кафедры информационной безопасности,
Курский государственный университет
Россия, 305000, г. Курск, ул. Радищева, 33
revenko253@mail.ru

Аннотация. В конце прошлого столетия Дж. Б. Майлз доказал, что если целая функция бесконечного порядка имеет нули, распределенные на конечной системе лучей, то её нижний порядок также равен бесконечности. К. Г. Малютин, М. В. Кабанко и Т. В. Шевцова (2022) распространили результат Майлза на истинно аналитические функции бесконечного порядка относительно классической функции роста r на верхней полуплоскости. В данной работе мы распространяем результат К. Г. Малютина, М. В. Кабанко и Т. В. Шевцовой на пространство истинно аналитических функций на верхней полуплоскости бесконечного порядка относительно модельной функции роста M. Понятие модельной функции роста M, введенное Б. Н. Хабибуллиным, охватывает широкий класс функций. В частности, функции, определяемые модельной, могут иметь бесконечный порядок, а также нулевой порядок в классическом смысле.

Ключевые слова: верхняя полуплоскость, истинно аналитическая функция, модельная функция, коэффициенты Фурье, бесконечный порядок, нижний порядок, задача Неванлинны.

Благодарности

Автор признателен своему научному руководителю профессору К. Г. Малютину за постановку задачи и поддержку, оказанную при работе над статьей. Автор также выражает признательность рецензенту, замечания которого существенно улучшили содержание статьи.

Для цитирования

Нефёдова А. А. Задача Майлза для аналитических функций бесконечного порядка на полуплоскости, определяемых модельной функцией // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 4. С. 11–20.

Введение

Метод рядов Фурье для изучения свойств целых и мероморфных функций из работ [1], [2], [3, 4] в статье К. Г. Малютина [5] в 2001 г. был распространен на дельта-субгармонические функции на полуплоскости.

Используя этот метод, Дж. Б. Майлз доказал, что если целая функция бесконечного порядка имеет нули, распределенные на конечной системе лучей, то её нижний порядок также равен бесконечности. В совместной работе К. Г. Малютина, М. В. Кабанко и Т. В. Шевцовой [7] результат из работы [6] был распространен на истинно аналитические функции бесконечного порядка относительно классической функции роста на верхней полуплоскости.

Настоящая статья является продолжением исследований, начатых в работе [8]. Мы распространяем результат из работы [7] на истинно аналитические функции на полуплоскости, рост которых определяется модельной функцией. Понятие модельной функции роста M, введенное Б. Н. Хабибуллиным [9] (см. также [10]), охватывает широкий класс функций. В частности, функции, определяемые модельной, могут иметь бесконечный порядок, а также нулевой порядок в классическом смысле.

В дальнейшем будем предполагать, что функция M для всех $r > 0$ удовлетворяет соотношению:

$$M(2r) \leq KM(r) \tag{1}$$

при некотором $K > 0$, не зависящем от r.

Для доказательства наших утверждений мы использовали метод рядов Фурье дельта-субгармонических функций на полуплоскости, разработанный К. Г. Малютиным [5].

1 Предварительные сведения

Мы будем использовать терминологию и определения из работ [8], [5] и [11]. У нас $C(a, r) = \{z : |a - z| < r\}$, $B(a, r) = \overline{C(a, r)}$, ($\overline{G}$ — это замыкание множества G), x^+ неотрицательная часть вещественного числа x, $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Im}\ z > 0\}$, $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$, для $0 < r_1 < r_2$ множество.

Через AK обозначаем пространство аналитических функций f в $\mathbb{C}_+$, таких, что $\ln |f|$ имеет положительную гармоническую мажоранту в каждой ограниченной подобласти $\mathbb{C}_+$, JA — пространство истинно аналитических функций на $\mathbb{C}_+$. Относительно свойств функций из пространств AK и JA отсылаем читателя к статье [11].

Пусть f — мероморфная функция на замкнутой верхней полуплоскости $\overline{\mathbb{C}_+}$, $r_n e^{i\varphi_n}$ — полюса f с учетом их кратности, $n \in \mathbb{N}$,

$c(r,f)=\sum\limits_{1\le r_n\le r}\sin\varphi_n$. В 1925 г. Р. Неванлинна [12] ввёл для функций f следующие характеристические функции:

$$A(r,f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^r\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\ln^+|f(t)|+\ln^+|f(-t)|\right)dt\,,$$

$$B(r,f)=\frac{2}{\pi r}\int\limits_0^\pi\ln^+|f(re^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi\,,$$

$$C(r,f)=2\int\limits_0^r\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{r^2}\right)c(t,f)\,dt\,,$$

$$S(r,f)=A(r,f)+B(r,f)+C(r,f)\,.$$

Пусть $f\in JM$, λ — её полная мера, $\lambda=\lambda_+-\lambda_-$ — разложение Жордана меры λ. Обозначим

$$m(r,f):=\frac{1}{r}\int\limits_0^\pi\ln^+|f(re^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2}B(r,f),r\ge1\,,$$

$$N(r,f):=\int\limits_1^r\frac{\lambda_-(t)}{t^3}\,dt=\frac{\pi}{2}(A(r,f)+C(r,f)+O(1))\,,$$

$$T(r,f):=m(r,f)+N(r,f)+m(1,1/f)=\frac{\pi}{2}S(r,f)+O(1)\,,$$

$$\lambda_-(t)=\lambda_-(B(0,t)).$$

Определение 1. *Порядком и нижним порядком функции $f\in JM$ относительно модельной функции M называются величины:*

$$\beta:=\beta[f]=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln(rT(r,f))}{\ln M(r)},\quad\alpha:=\alpha[f]=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln(rT(r,f))}{\ln M(r)}\,.$$

Если $\beta=\infty$, то f — функция бесконечного порядка, в противном случае функция f имеет конечный порядок.

2 Коэффициенты Фурье функции $f\in JM$

Пусть λ — полная мера функции $f\in JM$, G — функция Грина полукруга $C_+(0,R)$, $\dfrac{\partial G}{\partial\tau}$ — её производная по внутренней нормали.

Для функции f справедливо следующее представление в $C_+(0,R)$ [13]:

$$\ln|f(z)| = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\overline{C_+(0,R)}} \frac{G(z,\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta}\,d\lambda(\zeta)$$
$$+\frac{R}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial\tau}\ln|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi, \quad z\in C_+(0,R)\,. \tag{2}$$

Определим меру λ_k равенством

$$d\lambda_k(\tau e^{i\varphi}) = \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\tau^{k-1}\,d\lambda(\tau e^{i\varphi}), \quad \lambda_k(r) = \lambda_k B(0,r), \quad k\in\mathbb{N}\,.$$

В точках $\varphi = 0, \pi$, отношение $\dfrac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}$ доопределяется по непрерывности.

Нам понадобится обобщенная формула Карлемана из [13]:

$$\frac{1}{r^k}\int\limits_0^\pi \ln|f(re^{i\varphi})|\sin k\varphi\,d\varphi = \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt + \frac{1}{r_0^k}\int\limits_0^\pi \ln|f(r_0e^{i\varphi})|\sin k\varphi\,d\varphi, k\in\mathbb{N},$$

которая при $k=1$ принимает вид:

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^\pi \ln|f(re^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi = \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3}\,dt + \frac{1}{r_0}\int\limits_0^\pi \ln|f(r_0e^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi\,. \tag{3}$$

В этих обозначениях формулу Карлемана (3) можно записать следующим образом:

$$T(r,f) = T(r,1/f)\,. \tag{4}$$

Коэффициенты Фурье функции $f\in JM$ определяются формулой:

$$c_k(r,f) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \ln|f(re^{i\varphi})|\sin k\theta\,d\theta, \quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Пусть λ — полная мера $f\in JM$, тогда [15]

$$c_k(r,f) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k}{\pi}\int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt, \quad k\in\mathbb{N},\ \alpha_k = c_k(1,f)\,.$$

Отсюда

$$c_k(r,f) = \alpha_k r^k + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint\limits_{C_+(0,r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta} \tau^k \, d\lambda(\zeta) + \frac{r^k}{\pi k} \iint\limits_{D_+(r_0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im}\zeta} \, d\lambda(\zeta)$$
$$- \frac{1}{r^k \pi k} \iint\limits_{C_+(0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta} \tau^k \, d\lambda(\zeta)\,, \zeta = \tau e^{i\varphi}. \quad (5)$$

Кроме того, имеет место неравенство:

$$|c_k(r,f)| \leq \frac{2k}{\pi} \int\limits_0^\pi |\ln|f(re^{i\varphi})|| \sin\varphi \, d\varphi, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Из последнего неравенства и (4) следует:

$$rm(r,f) \geq \frac{\pi}{4k} |c_k(r,f)|, \quad k \in \mathbb{N}\,. \quad (6)$$

Действительно неравенство (6) следует из соотношений:

$$\frac{\pi}{2kr} |c_k(r,f)| \leq \frac{1}{r} \int\limits_0^\pi (\ln^+|f(re^{i\varphi})| + \ln^+|1/f(re^{i\varphi})|) \sin\varphi \, d\varphi$$
$$\leq m(r,f) + m(r,1/f) \leq 2m(r,f), \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Далее нам понадобится следующая лемма [7].

Лемма 1. *Если $g \in JM$ и $\lambda_g \equiv 0$, то $\ln|g(z)| = \operatorname{Im} F(z)$, где $F(z)$ — целая вещественная функция.*

Следующая лемма [6, Лемма 1.1] используется в доказательстве основной теоремы.

Лемма 2. *Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{N_0}$ — различные точки полуинтервала $[0, 2\pi)$. Для вещественных x символом x^* обозначается единственное число из $[-\pi, \pi)$, сравнимое с x по модулю 2π. Тогда существует возрастающая последовательность $I = \{n_l\}$ натуральных чисел, такая, что I имеет положительную плотность и*

$$(n_l\theta_j)^* \in \left(\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right), \quad j = 1, \ldots, N_0,\ n_l \in I. \quad (7)$$

3 Основной результат

Сформулируем и докажем основную теорему нашей работы.

Теорема 1. *Пусть полная мера истинно аналитической функции f бесконечного порядка относительно модельной функции M распределена на конечной системе лучей*

$$\mathbb{L}_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg z = \theta_k = \frac{\pi p_k}{q_k} \right\}$$

$k = 1, \ldots, N_0$; $p_k, q_k, N_0 \in \mathbb{N}$; $p_k < q_k$. *Тогда ее нижний порядок также равен бесконечности.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что носитель полной меры λ_f функции f не нагружает некоторую окрестность нуля, т. е. $C(0, r_0) \notin \operatorname{supp} \lambda$ при некотором $r_0 > 0$.

Используя формулы (5), получаем:

$$c_n(r, f) = \alpha_n r^n + \sum_{k=1}^{N_0} \frac{r^n \sin(\theta_k n)}{\pi n r_0^{2n}} \int\limits_0^{r_0} t^{n-1} d\lambda(t) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N_0} \frac{r^n \sin(\theta_k n)}{\pi n} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{d\lambda(t)}{t^{n+1}} - \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\sin(\theta_k n)}{r^n \pi n} \int\limits_0^{r} t^{n-1} d\lambda(t), \; n \in \mathbb{N}.$$

Из последнего равенства получаем:

$$c_n(r, f) = \alpha_n r^n + \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\sin(\theta_k n)}{\pi n} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{1}{t} \left[\left(\frac{r}{t}\right)^n - \left(\frac{t}{r}\right)^n \right] d\lambda(t), \; n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Дважды интегрируя по частям в правой части равенства (8), получаем:

$$c_n(r, f) = \alpha_n r^n + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N_0} \sin(\theta_k n) \left(\tilde{N}(r) + r^n \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\tilde{N}(t)}{t^{n+1}} \, dt \right)$$
$$+ \frac{n-1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_0} \sin(\theta_k n) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{1}{t} \left[\left(\frac{r}{t}\right)^n - \left(\frac{t}{r}\right)^n \right] \tilde{N}(t) \, dt, \; n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

где $\tilde{N}(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda(t)}{t^2} dt.$

По лемме 2 существует последовательность $I = \{n_l\}$ такая, что $(n_l\theta_j)^* \in \left(\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{N_0} \sin(\theta_k n_l) = \sum_{k=1}^{N_0} \sin(\theta_k n_l)^* \geq N_0 \sin\frac{\pi}{6} = \frac{N_0}{2}.$$

Из (9) при $n = n_l$, $l \in \mathbb{N}$, получаем:

$$\frac{|c_{n_l}(r,f)|}{r^{n_l}} \geq \frac{N_0}{\pi}\left(\frac{\tilde{N}(r)}{r^{n_l}} + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\tilde{N}(t)}{t^{n_l+1}}\,dt\right) - |\alpha_{n_l}|,\ n_l \in \mathbb{N}\,. \tag{10}$$

Предположим, что порядок функции $\tilde{N}(r)$ бесконечный. Тогда интеграл в правой части последнего неравенства неограничен при $r \to \infty$, поскольку

$$\int\limits_{r}^{\infty} \frac{\tilde{N}(t)}{t^{n+1}}\,dt \geq \frac{\tilde{N}(r)}{nr^n}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Используя это рассуждение, (6) и (10), получаем требуемое утверждение.

В противном случае, т. е. если порядок функции $\tilde{N}(r)$ конечный, то для всех $r > 0$ $\tilde{N}(r) \leq KM^\rho(r)$ при некоторых $K > 0$ и $\rho > 0$. Причем ρ — нецелое число. Тогда из (1) получаем:

$$K_1 r^\rho \geq \tilde{N}(2r) \geq \int\limits_{r}^{2r} \frac{\lambda(t)}{t^2}\,dt \geq \lambda(r)\int\limits_{r}^{2r} \frac{dt}{t^2} = \frac{\lambda(r)}{2r}\,,$$

при некотором $K_1 > 0$, т. е.

$$\lambda(r) \leq 2K_1 r^{\rho+1}\,.$$

Тогда из работы [15, Теорема 3] следует, что существует функция $g_1 \in JA$ порядка ρ с полной мерой λ. Имеем $g = f/g_1 \in JA$ и $\lambda_g \equiv 0$.

По лемме 1 $|g(z)| = \exp(\mathrm{Im}\ F(z))$. Здесь $F(z)$ — целая вещественная функция:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Тот факт, что $a_n \in \mathbb{R}$, для всех $n \in \mathbb{N}$, доказывается почленным дифференцированием ряда Тейлора функции $F(z)$ в точке $z = 0$.

Если только конечное число $a_n \neq 0$, то $F(z)$ — многочлен, следовательно, g и f имеют конечный порядок, что противоречит условию.

Далее

$$c_k(r,g) = a_k r^k, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Отсюда и из (6) получаем:

$$rm(r,g) \geq \frac{\pi}{4k}|c_k(r,g)| = \frac{\pi|a_k|r^k}{4k}, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Поскольку k — любое фиксированное натуральное число, то функция $g(z)$ имеет бесконечный нижний порядок.

Для $b > 1$ имеет место неравенство $(\ln(ab))_+ \geq (\ln a)_+ - (\ln b)_+$, используя которое получаем:

$$rm(r,g) \leq rm(r,f) + rm(r,g_1)\,.$$

Далее из соотношений

$$\varliminf_{r\to\infty} rm(r,g) \leq \varliminf_{r\to\infty} rm(r,f) + \varlimsup_{r\to\infty} rm(r,g_1)$$

и

$$\varliminf_{r\to\infty} rm(r,g) = \infty, \quad \varlimsup_{r\to\infty} rm(r,g_1) \leq \rho < \infty\,,$$

следует, что

$$\varliminf_{r\to\infty} rm(r,f) = \infty\,.$$

Теорема 1 доказана. □

Заключение

Экстремальные задачи на открытой полуплоскости, в отличие от комплексной плоскости, имеют свои особенности, связанные с наличием границы — вещественной оси. В частности, этим определяется различие экстремальных задач в классах мероморфных функций порядка больше единицы и порядка меньше или равного единицы. В настоящей работе мы рассматриваем классы мероморфных функций на полуплоскости бесконечного порядка. Формулировка основного результата не отличается от формулировки результата Майлза для мероморфных функций на плоскости, однако, для его доказательства используются совершенно другие определения и вспомогательные сведения, которые вводятся для мероморфных функций на открытой полуплоскости.

Литература

1. Rubel L. A., Taylor B. A. A Fourier series method for meromorphic and entire function. *Bull. Soc. Math. France.* 1968; 96: 53–96.

2. Miles J. B. Quotient representation of meromorphic functions. *J. d'Analyse Math.* 1972; 25: 371–388.

3. Miles J. B., Shea D. F. An extremal problem in value distribution theory. *Quart. J. Math. Oxford.* 1973; 24: 377–383.

4. Miles J. B. and Shea D. F. On the grows of meromorphic functions having at least one deficient value. *Duke Math. J.* 1976; 43: 171–186.

5. Malyutin K. G. Fourier series and δ-subharmonic functions of finite γ-type in a half-plane. *Sb. Math.* 2001; 192: 843–861. DOI: 10.1070/SM2001v192n06ABEH000572.

6. Miles J. B. On entire functions of infinite order with radially distributed zeros. *Pacif. J. Math.* 1979; 81: 131–157.

7. Malyutin K. G., Kabanko M. V., Shevtsova T. V. Analytic functions of infinite order in half-plane. *Пробл. анал. Issues Anal.* 2022; 2: 59–71. DOI: 10.15393/j3.art.2022.11010.

8. Нефедова А. А. Экстремальная задача Майлза — Шиа для мероморфных функций, определяемых модельной функцией роста // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 3. С. 17–28. DOI: 10.18101/2304-5728-2025-3-17-28.

9. Хабибуллин Б. Н. Обобщение уточненного порядка // Доклады Башкирского университета. 2020. Т. 5, № 1. С. 1–5.

10. Кабанко М. В., Малютин К. Г., Хабибуллин Б. Н. Об уточненной функции роста относительно модельной // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. № 230. С. 56–74.

11. Fedorov M. A., Grishin A. F. Some Questions of Nevanlinna Theory for the Complex Half–Plane. *Math. Physics, Analysis and Geometry (Kluwer Acad. Publish.).* 1998; 1; 3: 223–271.

12. Nevanlinna R. *Über die Eigenschaften meromorpher Functionen in einem Winkelraum.* Acta Soc. Sci. Fenn., 1925. Vol. 50, №. 12, P. 1–45.

13. Grishin A. F. Continuity and asymptotical continuity of subharmonic functions. *Math. Phys. Anal. Geom.* 1994; 1; 2: 193–215 (in Russian).

14. Goldberg A. A. Nevanlinna's lemma on the logarithmic derivative of meromorphic function. *Math. Notes.* 1975; 17; 4: 310–312.

15. Malyutin K. G. and Sadik N. Representation of subharmonic functions in a half-plane. *Sb. Math.* 2007; 198; 12: 1747–1761. DOI: 0.1070/SM2007v198n12ABEH003904.

Статья поступила в редакцию 23.10.2025; одобрена после рецензирования 21.11.2025; принята к публикации 26.11.2025.

MILES PROBLEM FOR ANALYTIC FUNCTIONS OF INFINITE ORDER ON THE HALF-PLANE DEFINED BY A MODEL FUNCTION

Anna A. Nefedova
Senior Lecturer, Department of Information Security,
Kursk State University
33 Radishchev St., Kursk, Russia

Abstract. J. B. Miles (1979) considered entire functions with zeros distributed on a finite system of rays. In particular, it was proved that if f is an entire function of infinite order whose zeros are located on a finite system of rays, then its lower order is also equal to infinity. K. G. Malyutin, M. V. Kabanko, and T. V. Shevtsova (2022) extended Miles's result to truly analytic functions of infinite order with respect to the classical growth function on the upper half-plane. An analytic function f on the upper half-plane of a complex variable is called truly analytic if its upper limit on the real axis is not positive. The total measure of a truly analytic function is a positive measure, which justifies the term "truly analytic function". If the order of a truly analytic function is equal to infinity, then the function is called a function of infinite order. Otherwise, the function f is called a function of finite order. In this paper we prove a similar result in the space of functions of infinite order with respect to the model growth function of analytic functions on the upper half-plane.

Keywords: upper half-plane, truly analytic function, model function, Fourier coefficients, infinite order, lower order, Nevanlinna problem.

For citation
Nefedova A. A. Miles Problem for Analytic Functions of Infinite Order on the Half-Plane Defined by a Model Function // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 4. P. 11–20.

The article was submitted 23.10.2025; approved after reviewing 21.11.2025; accepted for publication 26.11.2025.