

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Научная статья

УДК 517.977

DOI: 10.18101/2304-5728-2025-4-40-52

МИНИМИЗАЦИЯ ВЫРОЖДЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ТРАЕКТОРИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

© **Андреева Ирина Юрьевна**

кандидат физико-математических наук, доцент,
Уральский федеральный университет
Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
i.y.andreeva@urfu.ru

© **Гредасова Надежда Викторовна**

кандидат физико-математических наук,
Уральский федеральный университет
Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
n.v.gredasova@urfu.ru

© **Сесекин Александр Николаевич**

доктор физико-математических наук, профессор,
Уральский федеральный университет
Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19;
ведущий научный сотрудник,
Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН
Россия, 620108, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
a.n.sesekin@urfu.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача минимизации вырожденного квадратичного функционала на траекториях квазилинейной управляемой системы. Особенность задачи состоит в том, что решение задачи существует в пространстве обобщенных функций. Для исходной задачи строится вспомогательная задача. Её решение существует в пространстве абсолютно непрерывных функций. Для её решения применяются методы разложения по параметру и принцип максимума Л. С. Понтрягина. В результате конечного числа итераций строится субоптимальное управление для вспомогательной задачи. С помощью этого управления конструируется субоптимальное управление для исходной задачи. Это управление имеет импульсные составляющие, сосредоточенные в начальный и конечный моменты. Между этими моментами управление является непрерывной функцией. Построенное управление является программным. С его помощью можно построить позиционное управление, которое в случае воздействия возмущений на систему будет порождать импульсно-скользящий режим.

Ключевые слова: вырожденная линейно-квадратичная задача, асимптотически оптимальное управление, импульсные воздействия.

Для цитирования

Андреева И. Ю., Гредасова Н. В., Сесекин А. Н. Минимизация вырожденного квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 4. С. 40–52.

Введение

Системы, содержащие малый параметр при нелинейных членах в правой части дифференциальных уравнений, широко используются при решении различных задач. В теории оптимального управления также есть немало работ, посвященных задачам управления объектами, описываемыми квазилинейными дифференциальными уравнениями (см. например, [1] и библиографию этой книги). Задача оптимизации квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы рассматривалась в [2]. В статье рассмотрим задачу оптимизации вырожденного квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы. Будет показано, что субоптимальным управлением, решающим эту задачу, будут управления, содержащие импульсные составляющие.

1 Постановка задачи

Рассматривается квазилинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \mu f(x, t) + B(t)\dot{v}(t). \quad (1)$$

Мы будем минимизировать вырожденный квадратичный функционал

$$J[u(\cdot)] = 1/2 \int_{t_0}^{t_f} x^T(t)Q(t)x(t)dt \quad (2)$$

вдоль траекторий системы (1). На допустимые траектории системы (1) будем накладывать граничные условия

$$x(t_0) = x_0, \quad x_{t_f} = 0. \quad (3)$$

Здесь решение системы (1) $x(t)$ есть n -мерная функция ограниченной вариации, управление $v(t)$ — m -мерная вектор-функция ограниченной вариации (при этом полагаем, что $v(t_0) = 0$), производные в (1) понимаются в смысле теории обобщенных функций, μ — малый параметр, t_0 и t_f — заданные начальный и конечный моменты времени, $f(x, t)$ — нелинейная n -мерная вектор-функция, $A(t)$ и $Q(t)$ есть непрерывные $n \times n$ матрицы, при этом $Q(t)$ является симметричной и неотрицательно определенной. Матрица $B(t)$ является непрерывно дифференцируемой

$n \times m$ -матрицей-функцией. Отметим, что частный случай этой задачи докладывался на конференции [5].

Как отмечалось выше, задача (1)–(3) в классе измеримых управлений решения не имеет. При $\mu = 0$ задача (1)–(3) рассмотрена в [3, 4].

2 Построение вспомогательной задачи

Далее будем предполагать, что матрица $B(t)$ имеет структуру

$$B(t) = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \hat{B}(t) \end{pmatrix},$$

где $\hat{B}(t)$ — $m \times m$ непрерывно дифференцируемая невырожденная матрица, $\bar{0}$ — нулевая $(n - m) \times m$ матрица. Будем обозначать первые $n - m$ вектора x через \bar{x} и последние m координат этого вектора через \hat{x} . Также далее будем предполагать что вектор-функция $f(x, t)$ будет зависеть не от всего вектора x , а только от его первых $n - m$ координат, т. е.

$$f(x, t) = f_1(\bar{x}, t). \quad (4)$$

Исходная задача является вырожденной и в классе измеримых функций решения не имеет. Сделаем в задаче (1), (2), (3) редукцию с помощью замены

$$y(t) = x(t) - B(t)v(t). \quad (5)$$

Эта замена применялась при построении расширений задач оптимального управления, в частности, в [3], [4], [6], [7], [8].

Выполняя замену (5) в задаче (1), (2), (3), получим следующую вспомогательную задачу. Требуется минимизировать функционал

$$J[u(\cdot)] = 1/2 \int_{t_0}^{t_f} [y^T(t)Q(t)y(t) + 2v^T(t)B^T(t)Q(t)y(t) + v^T(t)B(t)^TQ(t)B(t)v(t)]dt \quad (6)$$

вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + \mu f_1(\bar{y}, t) + B_1(t)v(t), \quad (7)$$

где

$$B_1(t) = A(t)B(t) - \dot{B}(t),$$

а согласно (5) и (4) $f(x, t) = \bar{f}(\bar{y}, t)$.

Краевое условие при $t = t_0$ будет иметь вид $y(t_0) = x_0$ ($v(t_0) = 0$) и при $t = t_f$

$$y(t_f) = -B(t_f)v(t_f). \quad (8)$$

Учитывая структуру матрицы (5) из (8), имеем, что первые $n - m$ координат вектора $y(t_f)$ будут нулевыми. Следовательно, не накладывая никаких ограничений на $\hat{y}(t_f)$, условие (8) можно всегда обеспечить, полагая

$$v(t_f) = -\bar{B}^{-1}(t_f)\hat{y}(t_f). \quad (9)$$

Таким образом, краевое условие $x(t_f) = 0$ исходной задачи во вспомогательной задаче превращается в условие $\tilde{y}(t_f) = 0$, а остальные координаты вектора $y(t_f)$ могут быть произвольными. Для исходной задачи условие (9) означает, что последние $n - m$ координат вектора $x(t_f)$ будут зануляться за счет импульса в конечный момент.

Как и в [2], при $\mu = 0$ задача минимизации функционала (6) вдоль траекторий системы (7) будет называться базовой.

Пусть $v^0(t)$, $y^0(t)$ — оптимальное управление и оптимальная траектория в базовой задаче ($t \in [t_0, t_f]$). Согласно принципу максимума [9] существует решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t) + Q(t)y^0(t) + Q(t)B(t)v^0(t),$$

соответствующее $v^0(t)$, $y^0(t)$, которое будем обозначать как $\psi^0(t)$. Для этого решения выполняется следующее условие:

$$\begin{aligned} & \psi^{0T}(t)B_1(t)v^0(t) - \frac{1}{2}v^{0T}(t)B(t)T(t)Q(t)B(t)y^0(t) - v^{0T}(t)B^T(t)Q(t)B(t)v^0(t) = \\ & = \max_{v \in R^m} (\psi^{0T}(t)B_1(t)v(t) - \frac{1}{2}v^T(t)B^T(t)Q(t)B(t)y^0(t) - v^T(t)B^T(t)Q(t)B(t)v(t)). \end{aligned}$$

Из этого условия в предположении, что $\det B^T(t)Q(t)B(t) \neq 0 \forall t \in [t_0, t_f]$, можно найти оптимальное управление в базовой задаче

$$v^0(t) = (B^T(t)Q(t)B(t))^{-1}(B_1^T(t)\psi^0(t) - B^T(t)Q(t)y^0(t)). \quad (10)$$

Пусть $p_0 = \psi^0(t_0)$, тогда $y^0(t)$, $\psi^0(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ есть решение следующей начальной задачи:

$$\dot{y}(t) = (A(t) - M(t)B^T(t)Q(t))y(t) + M(t)B_1^T(t)\psi(t), \quad (11)$$

$$\dot{\psi}(t) = (Q(t) - N(t)B^T(t)Q(t))\psi(t) - (A^T(t) - N(t)B_1^T(t))y(t), \quad (12)$$

где

$$M(t) = B_1(t)(B^T(t)Q(t)B(t))^{-1}, \quad N(t) = Q(t)B(t)(B^T(t)Q(t)B(t))^{-1}. \quad (13)$$

Обозначим через $F(t, s)$ фундаментальную матрицу этой системы. Эта матрица будет являться решением такой начальной задачи

$$\dot{F} = \bar{A}(t)F, \quad F(t_0) = E_{2n},$$

где

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) - M(t)B^T(t)Q(t) & M(t)B_1^T(t) \\ Q(t) - N(t)B^T(t)Q(t) & -(A^T(t) - N(t)B_1^T(t)) \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}.$$

Для произвольной матрицы G , содержащей n строк, обозначим через \hat{G} первые $n - m$ строк матрицы G и через \bar{G} — последние m строк матрицы G . В результате матрицу перепишем в виде

$$F(t, s) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11}(t, s) & \tilde{F}_{12}(t, s) \\ \bar{F}_{11}(t, s) & \bar{F}_{12}(t, s) \\ \tilde{F}_{21}(t, s) & \tilde{F}_{22}(t, s) \\ \bar{F}_{21}(t, s) & \bar{F}_{22}(t, s) \end{pmatrix}.$$

С учетом введенных обозначений решение системы (11), (12) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}(t) \\ \bar{y}(t) \\ \tilde{\psi}(t) \\ \bar{\psi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11}(t, t_0) & \tilde{F}_{12}(t, t_0) \\ \bar{F}_{11}(t, t_0) & \bar{F}_{12}(t, t_0) \\ \tilde{F}_{21}(t, t_0) & \tilde{F}_{22}(t, t_0) \\ \bar{F}_{21}(t, t_0) & \bar{F}_{22}(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}(t_0) \\ \bar{y}(t_0) \\ \tilde{p} \\ \bar{p} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Учитывая, что $\tilde{y}(t_f) = 0$ и $\bar{\psi}(t_f) = 0$, из (14) следует

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}(t_f) \\ \bar{\psi}(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11}(t_f, t_0) & \tilde{F}_{12}(t_f, t_0) \\ \bar{F}_{21}(t_f, t_0) & \bar{F}_{22}(t_f, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}(t_0) \\ \bar{y}(t_0) \\ \tilde{p} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = 0_n, \quad (15)$$

где 0_n — нулевой n -мерный вектор. В предположении, что

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{F}_{12}(t_f, t_0) \\ \bar{F}_{22}(t_f, t_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

из (15) мы можем найти начальное условие для сопряженной переменной

$$p = - \begin{pmatrix} \tilde{F}_{12}(t_f, t_0) \\ \bar{F}_{22}(t_f, t_0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11}(t_f, t_0) \\ \bar{F}_{21}(t_f, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}(t_0) \\ \bar{y}(t_0) \end{pmatrix} \quad (16)$$

в базовой задаче.

3 Решение вспомогательной задачи

Теперь рассмотрим задачу минимизации функционала (6) на траекториях системы (7). Применим принцип максимума [9] к этой задаче.

$$H(y, \psi, v, t) = \psi^T(A(t)y(t) + \mu f_1(\bar{y}, t) + B_1(t)v(t)) - 1/2 (y^T(t)Q(t)y(t) + 2v^T(t)B^T(t)Q(t)y(t) + v^T(t)B(t)^T Q(t)B(t)v(t)).$$

Сопряженная система будет следующей

$$\dot{\psi}(t) = Q(t)y(t) + Q(t)B(t)v(t) - \left(A(t) + \mu \frac{\partial f_1(\bar{y}, t)}{\partial y} \right)^T \psi(t). \quad (17)$$

Из условия максимума функции $H(y, \psi, v, t)$ по v получим, что экстремальное управление в этой задаче будет иметь вид (10), т. е. совпадать с оптимальным управлением в базовой задаче. Этот факт является следствием того, что функция $f_1(\bar{y}, t)$ не зависит от управления v .

Подставим управление (10) в (6) и (17). Получим систему уравнений

$$\dot{y}(t) = (A(t) - M(t)B^T(t)Q(t))y(t) + \mu f_1(\bar{y}, t) + M(t)B_1^T(t)\psi(t), \quad (18)$$

$$\dot{\psi}(t) = (Q(t) - N(t)B^T(t)Q(t))y(t)$$

$$- \left(A^T(t) + \mu \left(\frac{\partial f_1(\bar{y}, t)}{\partial y} \right)^T - N(t)B_1^T(t) \right) \psi(t). \quad (19)$$

Рассмотрим задачу Коши (18), (19) с начальными условиями $y(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = p$. При сделанных выше предположениях найдутся такие ϵ_0 и μ_0 , при которых задача (18), (19) будет иметь единственное решение $y(t, p, \mu)$, $\psi(t, p, \mu)$, $t \in [t_0, t_f]$ при выполнении условий $\|p - p_0\| < \epsilon_0$, $|\mu| < \mu_0$.

Теорема. При сделанных ранее предположениях относительно задачи (6), (7) при достаточно малых μ существует единственное оптимальное управление:

$$v^0(t) = (B^T(t)Q(t)B(t))^{-1} (B_1^T(t)\psi(t, p(\mu), \mu) - B^T(t)Q(t)y(t, p(\mu), \mu)),$$

$$t \in [t_0, t_f], y_i(t_f, p, \mu) = 0, i = 1, 2, \dots, (n - m), \psi_j(t_i, p, \mu) = 0, j = n - m + 1, \dots, n, p(\mu) \in C^l, p(0) = p_0.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству аналогичного результата в [2] и поэтому здесь не приводится.

Пользуясь алгоритмом, представленным в статье [2], продолжим изложение построения приближенного решения исходной задачи. Пусть

задано натуральное число K и $K < l$. Так как $\nu(\mu) \in C^l$ и $\nu(0) = \nu_0$, то имеет место равенство $p(\mu) = p^{(K)}(\mu) + o(\mu^K)$, где

$$p^{(K)}(\mu) = p_0 + \sum_{k=1}^K \mu^k p_k$$

есть полином Тейлора K -й степени. Тогда вектор-функция

$$v^{(K)}(t, \mu) = (B^T(t)Q(t)B(t))^{-1} \left(B_1^T(t)\psi(t, p^{(K)}(\mu), \mu) - B^T(t)Q(t)y(t, p^{(K)}(\mu), \mu) \right)$$

будет приближенным управлением K -го порядка во вспомогательной задаче. Далее будем рассматривать процедуру нахождения коэффициентов p_k , $k = 1, \dots, K$ из разложения (18), изложенную в статье [2]. Согласно алгоритму из [2] следует разложить левую часть уравнений

$$\tilde{y}(t_f, p, \mu) = 0, \bar{\psi}(t_f, p, \mu) = 0 \quad (20)$$

по степеням малого параметра, применяя классическую технику Пуанкаре к системе (18), (19). Вектор-функции $y(t, p, \mu)$, $\psi(t, p, \mu)$ в каждой точке области определения имеют частные производные по μ до порядка q включительно. Следовательно, $y(t, p, \mu)$ и $\psi(t, p, \mu)$ представимы в виде

$$y(t, p, \mu) = \sum_{k=0}^K \mu^k y_k(t, p) + o(\mu^K),$$

$$\psi(t, p, \mu) = \sum_{k=0}^K \mu^k \psi_k(t, p) + o(\mu^K). \quad (21)$$

Используя метод Пуанкаре, составим дифференциальные уравнения для $y_k(t, p)$ и $\psi_k(t, p)$, $k = 1, \dots, K$ при фиксированном p .

$$\dot{y}_0(t, p) = (A(t) - M(t)B^T(t)Q(t))y_0(t, p) + M(t)B_1^T(t)\psi_0(t, p), \quad y_0(t_0, p) = x_0,$$

$$\dot{\psi}_0(t, p) = (Q(t) - N(t)B^T(t)Q(t))y_0(t, p) - (A^T(t) - N(t)B_1^T(t))\psi_0(t, p), \quad \psi_0(t_0, p) = p,$$

$$\dot{y}_1(t, p) = (A(t) - M(t)B^T(t)Q(t))y_1 + f_1(\bar{y}_0, t) + M(t)B_1^T(t)\psi_1(t, p), \quad y_1(t_0, p) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1(t, p) = (Q(t) - N(t)B^T(t)Q(t))y_1(t, p) -$$

$$- (A^T(t) - N(t)B_1^T(t)) \psi_1(t, p) - \left(\frac{\partial f_1(\bar{y}, t)}{\partial y}\right)^T \psi_0(t, p), \quad \psi_1(t_0, p) = 0, \quad (22)$$

$$\dot{y}_2(t, p) = (A(t) - M(t)B^T(t)Q(t))y_2(t, p) + \frac{\partial f_1(\bar{y}_0, t)}{\partial y} y_1(t, p) + \\ + M(t)B_1^T(t)\psi_2(t, p), \quad y_2(t_0, p) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2(t, p) = (Q(t) - N(t)B^T(t)Q(t))y_2(t, p) - (A^T(t) - N(t)B_1^T(t)) \psi_1(t, p) - \\ - \left(\frac{\partial f_1(\bar{y}_0, t)}{\partial y}\right)^T \psi_1(t, p) - \psi_0^T(t, p) - \left(\frac{\partial^2 f_1(\bar{y}_0, t)}{\partial y^2}\right)^T y_1(t, p), \quad \psi_2(t_0, t) = 0$$

и так далее.

Из приведенных выше систем (22) видно, что нахождение коэффициентов в представлениях (21) при заданном p сводится к последовательному решению начальных задач для систем линейных дифференциальных уравнений. В силу (21) левая часть уравнения (20) представима в виде

$$R(p, \mu) = \sum_{k=1}^K \mu^k R_k(p) + o(\mu^K).$$

Здесь $R_k(p) = y_k(t_f, p)$, $k = 0, \dots, K$. Составим системы линейных уравнений для векторов p_k , $k = 1, \dots, K$. В соответствии с алгоритмом, изложенным в [2], применим здесь метод неопределенных коэффициентов. Разложим в ряд вектор-функцию $\sum_{k=1}^K \mu^k R_k(p_k)(\mu)$ по степеням μ до порядка N . Затем приравняем коэффициенты разложения. В результате получим следующие невырожденные системы линейных уравнений для последовательного нахождения векторов ν_k , $k = 1, \dots, N$:

$$F_{12}(t_0, t_f)p_1 = -R_1(p_0), \quad F_{12}(t_0, t_f)p_2 = -R_2(p_0) - \frac{\partial R_1}{\partial p}(p_0)p_1, \dots \quad (23)$$

Для построения правых частей этих систем необходимо знать значения функций $y_k(t, p)$ и их частных производных по компонентам вектора p в точке (t_0, p_0) . Искомые значения получаются в результате интегрирования уравнений (22). Начальные задачи для производных получаем в результате дифференцирования этих же уравнений. Приведем пример для производной функции $y_0(t, p)$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial p} = A(t) \frac{\partial y_0}{\partial p} + B_1(t)P^{-1}(t)B_2(t) \frac{\partial \psi_0}{\partial p}, \quad \frac{\partial y_0}{\partial p}(t_0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \psi_0}{\partial p} = Q(t) \frac{\partial y_0}{\partial p} + [Q(t)B(t)P^{-1}(t)B_2(t) - A^T(t)] \frac{\partial \psi_0}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial p}(t_0) = E_n.$$

При вычислении правых частей систем (22) должны выполняться равенства $y_0(t, \nu_0) = y^0(t)$, $\psi_0(t, \nu_0) = \psi^0(t)$, $t \in [t_0, t_f]$. Тогда $R_1(\nu_0) = y^0(t_f)$, а вектор-функции $y_1^0(t)$, $\psi_1^0(t)$ являются решениями задачи:

$$\dot{y}_1(t) = A(t)y_1(t) + \tilde{f}_1(\psi_0(t), y_0(t), t) + B_1(t)P^{-1}(t)B_2(t)\psi_1(t), \quad y_1(t_0) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1(t) = Q(t)y_1(t) + [Q(t)B(t)P^{-1}(t)B_2(t) - A^T(t)]\psi_1(t) -$$

$$-\frac{\partial h}{\partial y}(\psi_0(t), y_0(t), t), \quad \psi_1(t_0) = 0.$$

В результате последовательного решения системы (22) находим p_k , $k = 1, \dots, N$ и строим полином $p^{(N)}(\mu)$. Управление $v^N(t, \mu)$ является приближенным управлением N -го порядка во вспомогательной задаче. Теперь необходимо решить задачу при $p = p^{(N)}(\mu)$. Тогда

$$\psi(t, \nu^{(N)}(\mu), \mu) = \bar{\psi}^{(N)}(t, \mu) + o(\mu^N),$$

где

$$\bar{\psi}^{(N)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^N \mu^k \bar{\psi}_k(t), \quad t \in [t_0, t_f].$$

Величины $\bar{\psi}_k(t)$ определяются путем последовательного решения задач Коши, отличающихся от (22) только начальными условиями для ψ_k : $\bar{\psi}_k(t_0) = \nu_k$, $k = 0, \dots, N$. Управление

$$\bar{v}^{(N)}(t, \mu) = P^{-1}(t)B_2(t)\bar{\psi}^{(N)}(t, \mu), \quad t \in [t_0, t_f] \quad (24)$$

вместе с $v^{(N)}(t, \mu)$ является приближенным управлением N -го порядка во вспомогательной задаче. Так как $\bar{\psi}^{(0)}(t, \mu) = \psi^0(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, то $\bar{v}^{(0)}(t, \mu) = v^0(t)$ является решением базовой задачи и приближенным управлением нулевого порядка во вспомогательной задаче. Аппроксимация управления первого порядка представимо в виде:

$$\bar{v}^{(1)}(t, \mu) = P^{-1}(t)B_2(t)(\psi^0(t) + \mu(\psi_1^0(t) + F_{22}(t, t_0)\nu_1)), \quad t \in [t_0, t_f].$$

Коэффициенты полиномов, с помощью которых строятся приближенные управления, зависят от начального состояния исходной системы. При построении приближенных управлений нулевого и первого порядка эта зависимость будет учтена. Далее будем считать, что выполнено условие $\det F_{12}(t_f, t_0) \neq 0$ при всех $t_0 < t_f$. Момент t_f будем считать также заданным. Из формулы (16) следует, что

$$p_0(y_0, t_0) = -F_{12}^{-1}(t_f, t_0)F_{11}(t_f, t_0)y_0.$$

Согласно (24) имеем

$$\bar{v}^{(0)}(t, y_0, t_0) = P^{-1}(t)B_2(t)\bar{\psi}^{(0)}(t, y_0, t_0), \quad t \in [t_0, t_f].$$

А так как $\bar{\psi}^{(0)}(t_0, y_0, t_0) = p_0(y_0, t_0)$, то

$$\bar{u}^{(0)}(t_0, y_0, t_0) = P^{-1}(t)B_2(t)\nu_0(y_0, t_0).$$

Поскольку (y_0, t_0) — произвольное начальное состояние, то вектор-функция

$$\bar{v}^{(0)}(y, t) = -P^{-1}(t)B_2(t)F_{12}^{-1}(t_f, t)F_{11}(t_f, t)y$$

представляет собой оптимальное управление типа обратной связи в базовой задаче. Для всех $t < t_f$ справедливо равенство $F(t_f, t) = G(t)$, где матрица

$$G(t) = \begin{pmatrix} G_{11}(t) & G_{12}(t) \\ G_{21}(t) & G_{22}(t) \end{pmatrix}$$

является решением краевой задачи

$$\dot{G} = -G\bar{A}(t), \quad G(t_f) = E_{2n}.$$

Поэтому асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка может быть записана в виде

$$\bar{v}^{(0)}(y, t) = -P^{-1}(t)B_2(t)G_{12}^{-1}(t)G_{11}(t)y.$$

Асимптотически субоптимальная обратная связь первого порядка представима в следующей форме:

$$v^{(1)}(y, t) = -P^{-1}(t)B_2(t)G_{12}^{-1}(t)R_1(y, t),$$

где

$$\begin{aligned} R_1(y, t) &= y_1(t_f, y, t) = \int_t^{t_f} (G_{11}(\tau)\tilde{f}(u, C_1(\tau, t)y, \tau) - \\ &\quad - G_{12}(\tau)\frac{\partial h}{\partial y}(C_1(\tau, t)y, C_2(\tau, t)y, \tau)) d\tau, \\ C_1(t, t_0) &= F_{11}(t, t_0) - F_{12}(t, t_0)G_{12}^{-1}(t_0)G_{11}(t_0), \\ C_2(t, t_0) &= F_{21}(t, t_0) - F_{22}(t, t_0)G_{12}^{-1}(t_0)G_{11}(t_0). \end{aligned}$$

Последовательно будет построено субоптимальное управление вспомогательной задачи $v^{(N)}(y(t), t)$.

4 Субоптимальное управление в исходной задаче

Для построения субоптимального решения исходной задачи нужно продифференцировать полученное решение вспомогательной задачи в смысле теории обобщенных функций. Учитывая, что $v^{(N)}(y(t), t) = 0$ при $t < t_0$, дифференцируя функцию $v^{(N)}(y(t), t)$, получим субоптимальное управление для исходной задачи. Оно будет иметь вид

$$\dot{v}_N(t) = \Delta_{t_0} v_N(t_0, x(t_0), \mu) \delta(t - t_0) + \dot{v}_N^{(r)}(t, \mu) + \Delta_{t_f} v_N(t_f, x(t_f), \mu) \delta(t - t_f), \quad (25)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

В (25) первое слагаемое $\Delta_{t_0} v_N(t_0, x(t_0), \mu)$ определяет интенсивность импульсного воздействия, реализуемого в начальный момент, которое обеспечивает начальный скачок траектории. Слагаемое $\dot{v}_N^{(r)}(t, \mu)$ является непрерывной функцией и осуществляет управление системой на интервале (t_0, t_f) . В конечный момент управление с помощью импульса сделает нулевыми последние $n - m$ координат фазового вектора.

Управление (25) является программным. Переход к позиционному алгоритму управления приведет к появлению импульсно-скользящих режимов [10].

Заключение

В работе предложена рекуррентная процедура построения субоптимального управления. Особенность задачи состоит в том, что искомое управление имеет импульсные составляющие. Сначала строится вспомогательная задача, решение которой существует в классе кусочно непрерывных управлений. С помощью решения вспомогательной задачи строится субоптимальное решение исходной задачи.

Литература

1. Калинин А. И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000. 187 с.
2. Калинин А. И., Лавринович Л. И. Применение метода возмущений к задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 3–12.
3. Завалицин С. Т., Сесекин А. Н. Об особых решениях в задачах оптимизации динамических систем с квадратичным критерием качества // Дифференциальные уравнения. 1975. № 1. С. 665–671.
4. Seseikin A. N., Frolova A. A. Singular linear-quadratic problem with a terminal condition. *AIP Conference Proceedings*. 2021; 2333. [040006]. doi.org/10.1063/5.0041692.

5. Андреева И. Ю., Сесекин А. Н. Вырожденная линейно-квадратичная задача для квазилинейной системы // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения Н. Н. Красовского. Екатеринбург, 2019. С. 32–34.
6. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. Москва: Наука, 1997. 288 с.
7. Miller В.М., Rubinovich E. Ya. Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations. *Automation and Remote Control*. 2013; 74: 1969–2006.
8. Дыхта В. А., Самсонок О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. Москва: Физматлит, 2003. 256 с.
9. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Москва: Наука, 1976. 592 с.
10. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсноскользящие режимы в нелинейных динамических системах // Дифференц. уравнения. 1983. № 5. С. 790–799.

Статья поступила в редакцию 02.10.2025; одобрена после рецензирования 21.11.2025; принята к публикации 26.11.2025.

MINIMIZATION OF A DEGENERATE LINEAR-QUADRATIC
FUNCTIONAL ON THE TRAJECTORIES
OF A QUASILINEAR SYSTEM

Irina Yu. Andreeva

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
Ural Federal University
19 Mira St., Yekateruiburg 620002, Russia

Nadezhda V. Gredasova

Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
Ural Federal University
19 Mira St., Yekateruiburg 620002, Russia

Alexander N. Seseкин

Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor,
Ural Federal University
19 Mira St., Yekateruiburg 620002, Russia
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the
Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekateruiburg 620108, Russia

Abstract. This paper considers the problem of minimizing a degenerate quadratic functional on the trajectories of a quasilinear control system. A distinctive feature of the problem is that its solution exists in the space of generalized functions. An auxiliary problem is constructed for the original problem. Its solution exists in the space of absolutely continuous functions. Parameter expansion methods and L.S. Pontryagin's maximum principle are applied to solve it. A finite number of iterations results in constructing a suboptimal control for the auxiliary problem. Using this control, a suboptimal control for the original problem is constructed. This control has impulse components concentrated at the initial and final moments. Between these instants, the control is a continuous function. The constructed control is a program control. It can be used to construct a positional control that, when subject to disturbances, will generate a impulse-sliding mode.

Keywords: degenerate linear-quadratic problem; asymptotically optimal control; impulse actions.

For citation

Andreeva I. Yu., Gredasova N. V., Seseikin A. N. Minimization of a Degenerate Linear-Quadratic Functional on the Trajectories of a Quasilinear System // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 4. P. 40–52.

The article was submitted 02.10.2025; approved after reviewing 21.11.2025; accepted for publication 26.11.2025.