Научная статья

УДК 519.854.6
DOI: 10.18101/2304-5728-2025-4-53-64

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЭПИДЕМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

© **Косьянов Никита Олегович**
стажер-исследователь,
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
kosyanov.nik@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача наилучшего распределения пациентов между медицинскими учреждениями с учетом их вместимости. Негладкая целевая функция этой задачи представляет собой максимальную нагрузку среди всех медучреждений, которую требуется минимизировать. Для поиска решения доказываются достаточные условия оптимальности, базирующиеся на свойстве неубывания целевой функции. На этой основе построен новый метод потенциальных значений прямого-обратного хода, позволяющий находить решения, которые удовлетворяют достаточным условиям оптимальности. С целью тестирования разработанного метода проведен вычислительный эксперимент на тестовых задачах, моделирующих эпидемии в крупных городах. Результаты эксперимента показывают, что данный метод успешно находит решения поставленных задач за меньшее время, чем ранее разработанный метод потенциальных значений прямого хода и оказывается эффективнее программных пакетов, использующих традиционные подходы глобальной оптимальности.

Ключевые слова: математическое моделирование, минимаксные задачи, дискретная оптимизация, метод ветвей и границ, достаточные условия оптимальности, метод потенциальных значений, тестовые эпидемические задачи, вычислительный эксперимент.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-41-03004 (https://rscf.ru/project/24-41-03004/). Автор также благодарит А. В. Орлова за ценные замечания, позволившие улучшить качество статьи.

Для цитирования

Косьянов Н. О. Метод потенциальных значений для эпидемической задачи распределения // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 4. С. 53–64.

Введение

Сегодня население Земли составляет свыше 8 миллиардов человек. С ростом численности населения значительно увеличивается масштаб эпидемий и пандемий вирусных инфекций. Яркий пример — пандемия, вызванная вирусом SARS-CoV-2 в 2020–2021 гг., после которой особенно актуальными стали задачи эпидемического моделирования [2, 5, 6]. Однако оптимальное управление эпидемиями [8, 12] невозможно без учета характеристик медицинских учреждений, таких как вместимость, численность медицинского персонала и скорость оказания медицинских услуг пациентам (производственная мощность) [11].

В подобных условиях естественным образом возникает задача оптимального распределения пациентов между медицинскими учреждениями таким образом, чтобы минимизировать максимальное время загрузки поликлиник и больниц. Традиционные методы решения подобных задач, основанные на решении релаксированной непрерывной линейной оптимизационной задачи с последующим применением метода типа ветвей и границ, зачастую оказываются неэффективными для крупных систем, поскольку страдают от так называемого «проклятия размерности» [3].

В статье рассматривается задача распределения m пациентов между n учреждениями, каждое из которых характеризуется собственной производственной мощностью и вместимостью. Целевая функция исследуется на минимум и представляет собой максимум всех нагрузок на учреждения, определяемых линейными функциями при линейных ограничениях. Несмотря на то, что математически задача является негладкой и невыпуклой (с дискретными переменными), с использованием ее специфики удается доказать достаточные условия оптимальности, которые используются при построении оригинального метода решения этой задачи, так называемого метода потенциальных значений.

Статья организована следующим образом. Первый раздел посвящен исследуемой задаче. В нем представлена математическая постановка эпидемической задачи распределения пациентов, введены основные обозначения. Здесь же доказаны достаточные условия оптимальности и предложен подход к построению решения задачи распределения, являющийся основой метода потенциальных значений. Во втором разделе по шагам описана схема метода потенциальных значений прямого-обратного хода и проведена оценка сложности его реализации. В следующем разделе приводятся результаты численных экспериментов, в которых предлагаемый метод сравнивается с ранее разработанным методом потенциальных значений прямого хода, а также с существующими подходами по поиску решения в целочисленных задачах линейной оптимизации, реализованными в известных программных пакетах. В заключение подводятся итоги работы: оценивается новизна предложенного подхода, обсуждаются его теоретическая и практическая значимость.

1 Постановка эпидемической задачи распределения и ее свойства

Рассмотрим задачу наилучшего распределения нагрузки между медицинскими учреждениями в условиях ограниченных ресурсов. Пусть в городе функционирует n медицинских учреждений, каждое из которых обладает определенной производственной мощностью и вместимостью. Требуется распределить m пациентов таким образом, чтобы нагрузка на учреждения была сбалансирована, а общая длительность процесса лечения была минимальной.

Обозначим через x_i количество пациентов, направленных в учреждение $i \in \mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\pi_i \in \mathbb{N}$ — производительность (мощность) этого учреждения, то есть количество пациентов, которое оно способно принять за единицу времени, а c_i — его вместимость, то есть максимально допустимое число пациентов для учреждения i.

Сформулируем задачу минимизации целевой функции, которая характеризует максимальную из всех нагрузок учреждений:

$$(\mathcal{P}) : f_m(x) = \max\left\{\frac{x_1}{\pi_1}; \frac{x_2}{\pi_2}; \ldots; \frac{x_n}{\pi_n}\right\} \downarrow \min_x, \quad x \in X_m, \tag{1}$$

где

$$X_m = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : x_i \leq c_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = m,\ i \in \mathcal{I}\right\}. \tag{2}$$

Здесь X_m — невыпуклое допустимое множество задачи $(\mathcal{P})$, поскольку оно является подмножеством $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ — множества n-мерных векторов с целыми неотрицательными компонентами, $x_i \leq c_i$ — естественное ограничение на вместимость каждого учреждения, а $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = m$ — отвечает за то, что должны быть распределены ровно m пациентов.

Задача $(\mathcal{P})$ относится к классу негладких целочисленных оптимизационных задач. Один из традиционных подходов [4, 7, 13] к решению подобных задач заключается в решении релаксированной непрерывной задачи линейной оптимизации:

$$(\mathcal{PL}) : f_m(t, x) = t \downarrow \min_{t,x}, \quad x \in X, \quad t \in T, \tag{3}$$

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq c_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = m\right\}, \quad T = \left\{t \geq \frac{x_i}{\pi_i}\right\}, \tag{4}$$

которая решается стандартными методами линейного программирования (например, симплекс-методом). Затем компоненты полученного непрерывного решения округляются до целых значений и применяются методы типа ветвей и границ с целью получить лучшее распределение, чем текущее.

Однако задача $(\mathcal{P})$ обладает рядом структурных свойств, позволяющих предложить более эффективный метод поиска решения по сравнению с изложенным выше традиционным подходом. В частности, в следующей лемме устанавливается важное свойство целевой функции задачи $(\mathcal{P})$.

Лемма 1. *В задаче $(\mathcal{P})$ функция $f_m(x)$ является неубывающей при увеличении компонент вектора x.*

Доказательство. Каждая линейная функция $\dfrac{x_i}{\pi_i}$ является неубывающей по x_i. Поскольку операция взятия максимума сохраняет данное свойство [1], то и функция $f_m(x) = \max\left\{\dfrac{x_1}{\pi_1}; \dfrac{x_2}{\pi_2}; \dots; \dfrac{x_n}{\pi_n}\right\}$ также является неубывающей по каждой компоненте x_i. □

Теперь покажем, что в задаче $(\mathcal{P})$ всегда можно найти вектор, в котором уменьшение одной компоненты и увеличение другой на 1 не приводит к строгому уменьшению значения целевой функции.

Теорема 1. *Если в задаче $(\mathcal{P})$ допустимое множество $X_m \neq \varnothing$, а значение задачи $\mathcal{V}(\mathcal{P}) \triangleq \inf\{f_m(x) \mid x \in X_m\} > -\infty$ конечно. Тогда существует вектор $x^* \in X_m$ такой, что:*

$$\frac{x_j^*}{\pi_j} \leq \frac{x_i^*+1}{\pi_i} \quad \forall i \in \mathcal{I} : x_i + 1 \leq c_i, \tag{5}$$

где $j = \arg\max\limits_{i \in I}\left\{\dfrac{x_i^*}{\pi_i^*}\right\}$, $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $X_m \neq \varnothing$ и $\forall\, x \in X_m$, найдется индекс $k \in \mathcal{I}$ такой, что

$$(a): \quad x_k + 1 \leq c_k, \tag{6}$$

$$(b): \quad \frac{x_k+1}{\pi_k} < \frac{x_j}{\pi_j}. \tag{7}$$

где $j = \arg\max\limits_{i \in I}\left\{\dfrac{\overline{x}_i}{\pi_i}\right\}$. Поскольку $X_m \neq \varnothing$, то и множество решений $Sol(\mathcal{P}) \neq \varnothing$. Кроме того, очевидно, что $Sol(\mathcal{P}) \subset X_m$. Значит, существует $\overline{x} \in Sol(\mathcal{P})$ такой, что

$$(a): \quad \overline{x}_k + 1 \le c_k, \tag{6'}$$

$$(b): \quad \frac{\overline{x}_k + 1}{\pi_k} < \frac{\overline{x}_j}{\pi_j}. \tag{7'}$$

где $j = \arg\max\limits_{i \in I} \left\{ \dfrac{\overline{x}_i}{\pi_i} \right\}$. Заметим, что $\overline{x}_j \ge 1$, поскольку в случае $\overline{x}_j = 0$ нарушается условие (7′). Тогда построим вектор

$$\widetilde{x} = \begin{cases} \widetilde{x}_i = \overline{x}_i, & i \ne j \text{ и } i \ne k, \\ \widetilde{x}_j = \overline{x}_j - 1, \\ \widetilde{x}_k = \overline{x}_k + 1. \end{cases} \tag{8}$$

Из (6′) и из того, что $\overline{x}_j \ge 1$, следует, что $\widetilde{x} \in X_m$. Кроме того, из (7′) и (8) получаем

$$\frac{\widetilde{x}_i}{\pi_i} \le \frac{\overline{x}_j}{\pi_j} \quad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{9}$$

В силу способа построения вектора $\widetilde{x}$ для индексов k и j неравенство (9′) выполняется строго, поэтому $j \ne \arg\max\limits_{i \in I} \left\{ \dfrac{\widetilde{x}_i}{\pi_i} \right\}$. Более того, с учетом леммы 1 получаем, что $f_m(\widetilde{x}) \le f_m(\overline{x})$. Из чего следует, что вектор $\widetilde{x} \in Sol(\mathcal{P})$ и для него также справедливы неравенства (6′) и (7′) с новыми индексами j и k, для которого также можно построить новый вектор по формуле (8). Повторив такое построение не более чем $n-1$ раз, получим

$$\frac{\widetilde{x}_i}{\pi_i} < \frac{\overline{x}_j}{\pi_j} \quad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{9'}$$

Следовательно, $f_m(\widetilde{x}) < f_m(\overline{x})$. Получили противоречие с тем, что $\overline{x} \in Sol(\mathcal{P})$. Теорема доказана. □

Теперь можно доказать достаточные условия оптимальности в задаче $(\mathcal{P})$.

Теорема 2. *Если условия теоремы 1 выполнены, а вектор x^* удовлетворяет неравенству (5), то x^* является решением задачи $(\mathcal{P})$.*

Доказательство. Поскольку $\forall x \in X_m$ $(x \ne x^*)$ выполняется ограничение $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = m$, то существует индекс $l \in \mathcal{I}$ такой, что:

$$x_l + 1 \le c_l \quad \text{и} \quad x_l^* + 1 \le x_l. \tag{10}$$

Тогда в силу (5) и леммы 1 получаем, что

$$f_m(x^*) \le f_m(x) \quad \forall x \in X_m. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что формула (11) представляет собой определение решения задачи $(\mathcal{P})$. Теорема доказана. □

Замечание 1. *Неравенство (5) является достаточным, но не необходимым условием оптимальности в задаче $(\mathcal{P})$ (см. следующий пример).*

Пример 1.

$$f_4(x) = \max\left\{\frac{x_1}{3}; \frac{x_2}{3}; \frac{x_n}{2}\right\} \downarrow \min_x, \quad x \in X_4, \tag{12}$$

где

$$X_4 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{Z}^3_{\ge 0} : x_i \le 2, \quad \sum_{i=1}^{3} x_i = 4, \quad i \in \mathcal{I} \right\}. \tag{13}$$

Для данной задачи можно найти вектор x^*, удовлетворяющий неравенству (5). Например, $x^* = (2,\ 1,\ 1)^T$, $f(x^*) = \dfrac{2}{3}$, который является одним из решений задачи (12)–(13). Также решением в этой задаче является и вектор $\overline{x} = (2,\ 2,\ 0)^T$, $f(\overline{x}) = \dfrac{2}{3}$, однако для него неравенство (5) нарушается (при $(j,k) = (1,3)$ или $(j,k) = (2,3)$). □

Идея метода потенциальных значений базируется на формуле (8) и неравенстве (9). Как можно видеть, каждый новый вектор, построенный по правилу (8), оказывается не хуже (с точки зрения целевой функции) предшествующего допустимого вектора, а на определенных шагах строго лучше (см. неравенство (9′)). Таким образом, из любого допустимого вектора за конечное число шагов можно получить вектор, удовлетворяющий условию (5), который согласно теореме 1 является решением задачи $(\mathcal{P})$.

2 Метод потенциальных значений

В предыдущем разделе было показано, что в любой задаче (1)–(2) с непустым допустимым множеством X_m существует решение x^*, удовлетворяющее (5). Для поиска таких решений ранее был разработан так называемый метод потенциальных значений прямого хода [9]. Однако данный метод требует особых стартовых векторов для его применения. Ниже предложена новая схема метода потенциальных значений прямого-обратного хода, которая данным недостатком не обладает.

Основной идеей метода является последовательное уменьшение тех компонент вектора x, которые приводят к наибольшим значениям под знаком максимума в целевой функции, и увеличение компонент вектора x, которые приводят к минимальному увеличению значений под знаком максимума. Для реализации этой идеи введем вспомогательный объект (функцию потенциальных значений):

$$p(x) \triangleq (p_1, p_2, \ldots, p_m) := \left(\frac{x_1 + 1}{\pi_1}, \frac{x_2 + 1}{\pi_2}, \ldots, \frac{x_n + 1}{\pi_n} \right), \tag{14}$$

где $x \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

Шаг 0. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$ — некоторый стартовый вектор, тогда

$$x^1 = \begin{cases} x_i^1 = 0, & \text{если } x_i^0 < 0, \\ x_i^1 = \left[x_i^0\right], & \text{если } 0 \leq x_i^0 \leq c_i, \\ x_i^1 = [c_i], & \text{если } x_i^0 > c_i. \end{cases} \tag{15}$$

Положить $s := 1$, $x^s := x^1$, $p(x^s) := \left(\frac{x_1^1 + 1}{\pi_1}, \frac{x_2^1 + 1}{\pi_2}, \ldots, \frac{x_n^1 + 1}{\pi_n} \right)$, $\sigma := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^1$.

Шаг 1. Если $\sigma < m$ перейти к шагу 2, иначе перейти к шагу 3.

Шаг 2. Найти $k = \arg\min\limits_{i \in I} \{p_i\}$, где $x_i + 1 \leq c_i$, положить:

$$x^{s+1} = \begin{cases} x_i^{s+1} := x_i^s, & i \neq k, \\ x_k^{s+1} := x_k^s + 1; \end{cases} \qquad p^{s+1} = \begin{cases} p_i^{s+1} := p_i^s, & i \neq k, \\ p_k^{s+1} := p_k^s + \frac{1}{\pi_k}; \end{cases} \tag{16}$$

$s := s + 1$ и вернуться на шаг 1.

Шаг 3. Найти $j = \arg\max\limits_{i \in I} \left\{ \frac{x_i^s}{\pi_i} \right\}$. Если $j = k$, то STOP. Иначе

$$x^{s+1} = \begin{cases} x_i^{s+1} := x_i^s, & i \neq j, \\ x_j^{s+1} := x_j^s - 1; \end{cases} \qquad p^{s+1} = \begin{cases} p_i^{s+1} := p_i^s, & i \neq j, \\ p_j^{s+1} := p_j^s + \frac{1}{\pi_j}; \end{cases} \tag{17}$$

$s := s + 1$ и вернуться на шаг 1. □

Нетрудно видеть, что метод потенциальных значений является довольно простым в реализации, поскольку все операции выполняются быстро и не требуют решения каких-либо вспомогательных задач. Шаг 2 будем называть прямым шагом метода потенциальных значений (число распределенных пациентов увеличивается на 1), а шаг 3 обратным (число распределенных пациентов уменьшается на 1).

Формулы (16) и (17) описывают один из способов построения вектора $\widetilde{x}$ из формулы (8) (см. док-во теоремы 1). Индекс k в данном случае выбирается таким образом, чтобы приращение значений под знаком максимума в целевой функции было наименьшим, так как исходная задача исследуется на минимум. Поскольку $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ конечно, то убывающая последовательность значений целевых функций, генерируемая методом, ограничена снизу. Кроме того, не менее чем через каждые $n-1$ шагов происходит строгое улучшение целевой функции (см. $(9')$). Из этого можно сделать вывод, что метод не имеет внутренних циклов и находит решение за конечное число шагов, что подтверждается результатами тестирования.

Ранее разработанный метод потенциальных значений прямого хода не включал шаг 3 и потому находил решение задачи $(\mathcal{P})$ только при определенных стартовых векторах, например, начиная с нулевого вектора $x^0 = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

3 Результаты расчетов

Тестирование предложенного метода потенциальных значений прямого-обратного хода проводилось на серии случайно сгенерированных тестовых задач, моделирующих распространение эпидемии в крупном городе. Диапазоны случайных параметров (табл. 1) определялись на основе данных о системе медицинских учреждений г. Иркутска.

Таблица 1. Параметры численного тестирования

Параметр	**Диапазон значений**
m	[105 000; 390 000]
n	[7; 26]
π_i	[80; 480]
c_i	[2 500; 12 000]

По данным Росстата, численность населения города Иркутска на 1 января 2025 г. составила 605 708 человек. В городе функционирует восемь инфекционных больниц, что в среднем соответствует примерно 75 тыс. жителей на одно медицинское учреждение. В рамках моделирования предполагалось, что в каждом учреждении работает случайное количество врачей в диапазоне от 5 до 10, при этом каждый врач в среднем принимает случайное число пациентов (от 16 до 48 человек) при стандартной продолжительности рабочего дня 8 часов. Количество пациентов, направляемых на лечение, принималось равным от 17 до 65% общей численности населения. Диапазон вместимости для каждого медицинского учреждения составлял от 0,5 до 3% общей численности населения. Также предполагалось, что в период крупной эпидемии могут быть задействованы дополнительные ресурсы учреждений другого профиля, поэтому было сгенерировано по 50 задач для каждого целого $n \in [7, 26]$.

Метод потенциальных значений прямого-обратного хода (*PVM-FB*) сравнивался с методом потенциальных значений прямого хода (*PVM*), а также с результатами работы пакетов программ, применяемых для решения целочисленных линейных задач оптимизации с использованием метода типа ветвей и границ (*GLPK* и *OR-Tools*). Эти пакеты были выбраны для сравнения как наиболее эффективные среди бесплатных доступных пакетов.

Таблица 2. Сравнение методов по качеству решения (количество баллов)

n	Число задач	PVM-FB	PVM	GLPK	OR-Tools
7	50	50	50	**49**	4
8	50	50	50	50	0
9	50	50	50	50	0
10	50	50	50	50	0
11	50	50	50	50	0
12	50	50	50	50	0
13	50	50	50	**49**	0
14	50	50	50	50	0
15	50	50	50	50	0
16	50	50	50	50	0
17	50	50	50	50	0
18	50	50	50	**49**	0
19	50	50	50	50	0
20	50	50	50	**49**	0
21	50	50	50	50	0
22	50	50	50	**49**	0
23	50	50	50	50	0
24	50	50	50	50	0
25	50	50	50	**48**	0
26	50	50	50	50	0

В таблице 2 приведены результаты тестирования, в которых методы сравнивались по качеству полученного решения. Будем обозначать как $f_{\text{PVM-FB}}$, f_{PVM}, f_{GLPK}, $f_{\text{OR-Tools}}$ — значения целевых функций, вычисленных для решений, полученных каждым из методов (*PVM-FB*, *PVM*, *GLPK*, *OR-Tools*). В случае если значение целевой функции одного из методов было минимальным среди всех значений, полученных другими подходами для данной задачи, то данный метод получал 1 балл, то есть если выполнено неравенство

$$f_{\text{Method}} \leq f^*, \tag{18}$$

где $f^* = \min\{f_{\text{PVM-FB}},\ f_{\text{PVM}},\ f_{\text{GLPK}},\ f_{\text{OR-Tools}}\}$.

Баллы, представленные в таблице 2, демонстрируют, что предложенный метод потенциальных значений прямого-обратного хода во всех случаях обеспечивает решения не хуже по качеству, чем метод потенциальных значений прямого хода. Пакет GLPK справился почти со всеми задачами, однако в 7 задачах (отмечено в таблице 2 жирным шрифтом) показал результат хуже чем оба метода потенциальных значений. При этом пакет OR-Tools смог найти решение только в 4 задачах из 1 000.

Таблица 3. Сравнение методов по среднему времени поиска решения

PVM-FB	PVM	GLPK	OR-Tools
0,000728 с	0,001705 с	0,005716 с	0.027375 с

Затем было проведено сравнение по среднему времени поиска решения для всех методов (табл. 3) на всем наборе из 1 000 задач. Как можно видеть, метод потенциальных значений прямого-обратного хода находит решения в среднем более чем в два раза быстрее по сравнению с методом потенциальных значений прямого хода и почти в десять раз быстрее, чем пакет GLPK. Скорость работы OR-Tools в сочетании с неудовлетворительным качеством найденных решений не позволяет использовать данный пакет для решения задач распределения нагрузки между медицинскими учреждениями.

Заключение

В настоящей работе была исследована задача наилучшего распределения нагрузки между медицинскими учреждениями с ограничениями. Для данной задачи доказаны достаточные условия оптимальности, а также продемонстрировано, что найдется как минимум одно решение, удовлетворяющее этим условиям. Построена схема решения задачи с использованием достаточных условий оптимальности.

Наконец, был проведен вычислительный эксперимент, продемонстрировавший высокую эффективность разработанного алгоритма на тестовых задачах распределения эпидемической нагрузки в крупном городе. Эксперимент показал, что новый метод потенциальных значений успешно находит решение в эпидемической задаче распредения, при этом тратя на поиск существенно меньше времени, чем методы, основанные на традиционных способах решения.

Полученные результаты позволяют предположить, что разработанный метод может быть обобщен на задачи наилучшего распределения с любыми неубывающими функциями. Дальнейшее тестирование методики будет продолжено в этом направлении.

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 543 с.

2. Захаров В. В., Балыкина Ю. Е. Ретроспективный анализ и прогнозирование распространения вирусов в реальном времени: на примере COVID-19 в Санкт-Петербурге и в Москве в 2020–2021 гг. // Вопросы вирусологии. 2024. № 6. С. 500–508. DOI: 10.36233/0507-4088-265.

3. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.

4. Boulmier A., Abdennadher N., Chopard B. Optimal load balancing and assessment of existing load balancing criteria. *Journal of Parallel and Distributed Computing.* 2022; 169: 211–225. DOI: 10.1016/j.jpdc.2022.07.002.

5. Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology Texts in Applied Mathematics. New York: Springer, 2010. № 337. pp. 345–393.

6. Gubar E. A., Policardo L., et al. On optimal lockdown policies while facing socioeconomic costs. *Annals of Operations Research.* 2024; 337: 959–992. DOI: 10.1007/s10479-023-05454-8.

7. Jiao H., Wang F., Chen Y. An Effective Branch and Bound Algorithm for Minimax Linear Fractional Programming. *Journal of Applied Mathematics.* 2014; 2014: 1–8. DOI: 10.1155/2014/160262.

8. Kosyanov N. O., Gubar E. A., Taynitskiy V. A. MPC Controllers in SIIR Epidemic Models. *Computation (MDPI).* 2023; 9: 173. DOI: 10.3390/computation11090173.

9. Kosyanov N. O. On an Improvement to the Next-step Procedure // Proc. of the 7th International Workshop on Information, Computation, and Control Systems for Distributed Environments (ICCS-DE 2025). 2025. pp. 149–151.

10. Lawler E. L., Wood D. E. Branch-and-Bound Methods: A Survey. *Operations Research.* 1966; 14: 699–719. DOI: 10.1287/opre.14.4.699.

11. Stinnett A. A., Paltiel A. D. Mathematical programming for the efficient allocation of health care resources. *Journal of Health Economics.* 1996; 15: 641–653.

12. Taynitskiy V. A., Gubar E. A., et al. Optimal Control of Joint Multi-Virus Infection and Information Spreading. *IFAC-PapersOnLine.* 2020; 53: 6650–6655. DOI: 10.1016/j.ifacol.2020.12.086.

13. Zhao Y., Liu S., Jiao H. A new branch and bound algorithm for minimax ratios problems. *Open Mathematics.* 2017; 15: 840–851. DOI: 10.1515/math-2017-0072.

Статья поступила в редакцию 05.11.2025; одобрена после рецензирования 21.11.2025; принята к публикации 26.11.2025.

THE POTENTIAL VALUES METHOD FOR AN EPIDEMIC PROBLEM OF ALLOCATION

Nikita O. Kosyanov
Research Intern
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences
134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia

Abstract. This work addresses the problem of optimal allocation of patients among medical facilities, taking into account their capacities. The nonsmooth objective function represents the maximum load across all facilities, which needs to be minimized. Sufficient conditions for optimality, based on the non-decreasing property of the objective function, are derived to obtain the solution. Building on this, a new forward–backward potential values method is proposed, which allow to find the vector, that satisfy the sufficient optimality conditions. To evaluate the method, computational experiments were conducted on test problems simulating epidemics in large cities. The results demonstrate that the proposed approach successfully finds solutions in less time than the previously developed forward potential values method and outperforms software packages that including traditional global optimization techniques.

Keywords: mathematical modeling, min-max optimization, discrete optimization, branch-and-bound method, sufficient optimality conditions, potential values method, epidemic test problems, numerical experiment.

For citation
Kosyanov N. O. The Potential Values Method for an Epidemic Problem of Allocation // Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics. 2025. N. 4. P. 53–64.

The article was submitted 05.11.2025; approved after reviewing 21.11.2025; accepted for publication 26.11.2025.